

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2001 - sessione ordinaria**

---

1. Provare che una sfera è equivalente ai  $\frac{2}{3}$  del cilindro circoscritto.
  2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ .
  3. Dimostrare che se  $p(x)$  è un polinomio allora tra due qualsiasi radici distinte di  $p(x)$  c'è una radice di  $p'(x)$ .
  4. Calcolare la derivata della funzione  $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ . Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?
  5. Calcolare l'integrale  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ .
  6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito  $\int_0^\pi \sin x dx$  e si confronti il risultato con il valore esatto dell'integrale.
  7. Verificato che l'equazione  $x - e^{-x} = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli una approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
  8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?
  9. Spiegare il significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.
  10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che "se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h".
- 

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2001 - sessione ordinaria**

---

1. Indicata con  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, si sa che  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow a$ , essendo  $l$  ed  $a$  numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che  $f(a) = l$  e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che  $f(0) = 2$ .  
Calcolare:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x}$ , dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.
3. Si consideri il cubo di spigoli  $AA', BB', CC', DD'$  in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'D'C'$ . Sia  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ . I piani  $ACC'$  e  $D'DE$  dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quinto-plo di quella meno estesa.
4. Un tronco di piramide ha basi di aree  $B$  e  $b$  ed altezza  $h$ . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume  $V$  è espresso dalla seguente formula:  
$$V = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$
  
In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.
5. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a, b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.
6. Dimostrare che si ha:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  dove  $n, k$  sono numeri naturali qualsiasi, con  $n > k > 0$ .
7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:  
A) area massima e perimetro massimo;  
B) area massima e perimetro minimo;  
C) area minima e perimetro massimo;  
D) area minima e perimetro minimo.  
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.
8. Considerata la funzione:  
 $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ ,  
dove  $a$  è un parametro reale non nullo, determinare i valori di  $a$  per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.
9. Il limite della funzione  $\frac{\sin x - \cos x}{x}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$ ,  
A) è uguale a 0;  
B) è uguale ad 1;  
C) è un valore diverso dai due precedenti;

D) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione  $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x}$ . Stabilire se si può calcolarne il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2001 – sessione suppletiva

- Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescita o decrescita delle curve.
- Calcolare la derivata della funzione:  

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1},$$
 Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?
- Dire qual è il dominio della funzione  $f(x) = x^\pi - \pi^x$  e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di  $f(x)$  nel punto  $x = \pi$ .
- Calcolare, integrando per parti:  

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x dx$$
- Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di «*concetto primitivo*» e di «*assioma*».
- Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, ..., 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.
- Verificato che l'equazione  $x^3 - 2x - 5 = 0$  ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
- Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.
- Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante: ... *se del mezzo cerchio far si puote triangol sì ch'un retto non avesse.* (Paradiso, XIII, 101-102)

### QUESTIONARIO – Ordinamento 2001 - sessione suppletiva

- Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , si prendano in esame le due seguenti proposizioni:  
 A: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia definita in un punto  $a$  è che sia continua in  $a$ .  
 B: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia continua in un punto  $a$  è che sia derivabile in  $a$ .  
 Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta.  
 a) A vera – B vera ; b) A vera – B falsa ; c) A falsa – B vera ; d) A falsa – B falsa
- Si consideri il cubo di spigoli  $AA', BB', CC', DD'$ , in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Indicato con  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ , sia  $CF$  la retta perpendicolare a  $DE$  condotta per  $C$ . I piani  $D'DE$  e  $C'CF$  dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.
- Calcolare se esiste un numero naturale  $n$  per il quale risulti:  

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$
- Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che:  
 $f(0) = 1$  ed  $f'(0) = 2$ .  
 Calcolare:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\operatorname{cos} 2x - 1}$ .
- Dimostrare che la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione  $a^x$ , dove  $a$  è un numero reale positivo diverso da 1, è  $a^x \ln a$ .
- Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.
- Una primitiva della funzione  $f(x)$  è  $x^2 + 2x$ . Se è possibile calcolare  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ , determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.
- In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sia  $T$  un trapezoide di base  $[a ; b]$  relativo alla funzione  $f(x)$ , continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

9. Calcolare la derivata della funzione  $\text{sen}(2x)$  rispetto alla variabile  $x$ , ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.
10. Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , derivabile almeno due volte in un dato punto  $a$ , affinché la funzione  $f(x)$  abbia in  $a$  un punto di flesso la condizione  $f''(a) = 0$  è:  
 a) necessaria e sufficiente. b) necessaria ma non sufficiente. c) sufficiente ma non necessaria.  
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**QUESTIONARIO – P. N. I. 2002 – sessione ordinaria**

1. Se  $a$  e  $b$  sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono  $n$ ?
2. Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610-1685), amico di *Blaise Pascal*: “giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?”
3. Assumendo che i risultati  $X, 1, 2$  delle 13 partite di Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.
4. Calcolare:  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}.$$
5. Cosa si intende per *funzione periodica*? Qual è il *periodo* di  $f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ ? Quale quello di  $\sin 2x$ ?
6. Utilizzando il teorema di *Rolle*, si verifichi che il polinomio  $x^n + px + q$  ( $p, q \in R$ ), se  $n$  è pari ha al più due radici reali, se  $n$  è dispari ha al più tre radici reali.
7. Data la funzione:  $f(x) = e^x - \sin x - 3x$ , calcolarne i limiti per  $x$  tendente a  $+\infty$  e  $-\infty$  e provare che esiste un numero reale  $\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$  in cui la funzione si annulla.
8. Verificare che la funzione  $3x + \ln x$  è strettamente crescente. Detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g(3)$ .
9. Trovare  $f(t)$  sapendo che  $\int_0^1 f(t) dt = x \cos(\pi x)$ .
10. Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2002 - sessione ordinaria**

1. Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.
3. Considerati i numeri reali  $a, b, c, d$  – comunque scelti – se  $a > b$  e  $c > d$  allora:  
 a)  $a + d > b + c$ ;  
 b)  $a - d > b - c$ ;  
 c)  $ad > bc$ ;  
 d)  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ .  
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.
4. Si consideri la seguente proposizione: “La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica”. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.
5. Determinare, se esistono, i numeri  $a, b$  in modo che la seguente relazione:  

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$
 sia un'identità.
6. Si consideri la funzione:  

$$f(x) = (2x - 1)^7 (4 - 2x)^5.$$
 Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo  $\frac{1}{2} < x < 2$ .
7. Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x)$  tale che:  

$$f(x) = \int_0^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$
8. La funzione reale di variabile reale è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[1; 3]$  e derivabile nell'intervallo aperto  $]1; 3[$ . Si sa che  $f(1) = 1$  e inoltre  $0 \leq f'(x) \leq 2$  per ogni  $x$  dell'intervallo  $]1; 3[$ . Spiegare in maniera esauriente perché risulta

$$1 \leq f(x) \leq 5.$$

9. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ( $Oxy$ ), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$$

Tale luogo è costituito da:

- un punto;
- due punti;
- infiniti punti;
- nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , continua per ogni  $x$ , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a, \quad \int_0^6 f(x) dx = b,$$

dove  $a, b$  sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori  $a, b$  per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_0^3 f(2x) dx = \ln 4.$$

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2002 - sessione suppletiva

- Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).
- Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.
- Calcolare la derivata rispetto a  $x$  della funzione  $\int_x^b f(t) dt$ , ove  $f(x)$  è una funzione continua.

4. Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4}.$$

- Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di  $e^x \sin x = 1$  c'è almeno una radice reale di  $e^x \cos x = -1$ .
- Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e  $x$ , provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

- Verificare che la funzione:  $y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$  è invertibile e detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(0)$ .
- Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\ln(x)}{x} dx$$

con un errore inferiore a  $10^{-4}$ .

- Verificato che l'equazione  $\cos x - \ln x = 0$  ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli una approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
- Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra «concetto primitivo» e «assioma»

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2002 – sessione suppletiva

1. Si consideri la seguente equazione in  $x, y$ :

$$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0,$$

dove  $k$  è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

- è una circonferenza per ogni valore di  $k$ .
- è una circonferenza solo per  $k < \frac{1}{2}$ .
- è una circonferenza solo per  $k < \frac{1}{4}$ .

- d) non è una circonferenza qualunque sia  $k$ .  
Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.
2. Considerata la funzione di variabile reale:  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ , dire se esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a 1 e giustificare la risposta.
3. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale. Si sa che:
- $f(x)$  è derivabile su tutto l'asse reale;
  - $f(x) = 0$  solo per  $x = 0$ ;
  - $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ;
  - $f(x) = 0$  soltanto per  $x = -2$  e  $x = 1$ ;
  - $f(-2) = 1$  ed  $f(1) = -2$ .
- Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di  $f(x)$ ?
4. Sia  $f(x)$  una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:
- $$\begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{sen} 2x & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{\operatorname{sen} x} & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$
- dove  $a$  è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di  $a$  per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto  $x = 0$ .
5. Un titolo di borsa ha perso ieri l' $x$  % del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l' $y$  %, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere  $y$  in funzione di  $x$ .
6. Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale  $f(x)$  sia continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  è sufficiente per concludere che  $f(x)$  è integrabile su  $[a; b]$ . Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.
7. Una primitiva della funzione  $f(x) < \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+4}$  è:
- a)  $\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$ .
  - b)  $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ .
  - c)  $\ln\left(\sqrt{x^2+2x}\right)$ .
  - d)  $\ln\left(\sqrt{2x^2+x}\right)$ .
- Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.
8.  $S_n$  rappresenta la somma dei primi  $n$  numeri naturali dispari. La successione di termine generale  $a_n$  tale che  $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$ , è:
- a) costante.
  - b) crescente.
  - c) decrescente.
- Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.
9. Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.
10. Di due rette  $a, b$  – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta  $p$ .
- a) È possibile che le rette  $a, b$  siano parallele?
  - b) È possibile che le rette  $a, b$  siano ortogonali?
  - c) Le rette  $a, b$  sono comunque parallele?
  - d) Le rette  $a, b$  sono comunque ortogonali?
- Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

**QUESTIONARIO – P. N. I. 2002 – sessione straordinaria**

1. In un piano è assegnata una parabola  $p$ . Tracciata la tangente  $t$  a essa nel suo vertice, chiamati  $M$  ed  $N$  due punti di  $p$  simmetrici rispetto al suo asse e indicate con  $M'$  ed  $N'$  rispettivamente le proiezioni ortogonali di  $M$  ed  $N$  sulla retta  $t$ , determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta  $MN$  e quella del rettangolo  $MNN'M'$ , fornendo una esauriente dimostrazione.
2. Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sa-

pendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

3. In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$  è assegnata l'iperbole di equazione  $y = \frac{1}{x}$ . Considerati su di essa i punti  $A$  e  $B$  di ascisse rispettivamente  $a$  e  $\frac{1}{a}$ , con  $a \neq 0$ , si traccino le tangenti all'iperbole in  $A$  e  $B$ . Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

4. Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x + \frac{x}{|x|} \right) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{x}{|x|} \right) = +1.$$

5. Considerata la funzione  $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-2}$ , stabilire se è continua e derivabile nel punto  $x = 2$  e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.
6. Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di  $n$  oggetti presi a  $k$  a  $k$  in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a  $k$  a  $k$  e delle permutazioni semplici su  $k$  oggetti.
7. Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:
- divisibile per 10 o per 8,
  - divisibile per 10 e per 8,
  - non divisibile per 10 né per 8.

8. Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro  $(1; 2)$  e caratteristica  $\frac{1}{4}$  trasforma il triangolo di vertici  $(4; 0)$ ,  $(-4; 4)$ ,  $(0; 8)$ .

9. Tra le affinità di equazioni: 
$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , determinare quella che trasforma i punti di coordinate  $(3; \sqrt{2})$  e  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$  ordinatamente nei punti di coordinate  $\left(\frac{1}{3}; \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$  e  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ .

10. Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

### QUESTIONARIO – Ordinamento 2002 – sessione straordinaria

- Sia  $D$  il dominio di una funzione reale di variabile reale  $f(x)$  e sia  $x_0$  un elemento di  $D$ : definire la continuità e la discontinuità di  $f(x)$  in  $x_0$  e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.
- Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2002 - sessione straordinaria*
- Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2002 - sessione straordinaria*
- Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2002 - sessione straordinaria*
- Dimostrare che la derivata della funzione  $\lg_a x$  è la funzione  $\frac{1}{x} \lg_a e$ , dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.
- Considerata l'equazione  $x^2 + kx + k = 0$ , calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per  $k \rightarrow +\infty$ .
- Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2002 - sessione straordinaria*
- Dimostrare che le curve di equazione  $y = x^2 + kx + k$ , assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.
- Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.
- Vedi quesito n. 6 *Questionario P. N. I. 2002 - sessione straordinaria*

### QUESTIONARIO - Sperimentazioni autonome 2002 - sessione ordinaria

- Due circonferenze,  $k$  e  $k'$ , sono tangenti esternamente nel punto  $T$ . Due rette distinte,  $a$  e  $b$ , condotte per  $T$ , secano la circonferenza  $k$  rispettivamente nei punti  $A$  e  $B$ , e la circonferenza  $k'$  nei punti  $A'$  e  $B'$ . Stabilire se le rette  $AB$  e  $A'B'$  sono parallele o

incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è il doppio dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide.

3. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$3x^2 + 3y^2 - 6kx + y + 2 = 0$$

dove  $k$  è un parametro reale. Determinare, se esistono, i valori di  $k$  per cui il luogo è costituito da:

- A) un punto
- B) due punti
- C) infiniti punti
- D) nessun punto

4. Dimostrare che il numero  $\sqrt{5}$  non è razionale.

5. Si considerino i numeri  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ . Senza usare strumenti di calcolo automatico (salvo che per controllare eventualmente l'esattezza del risultato), disporli in ordine crescente ed illustrare il ragionamento fatto per tale operazione.

6. Calcolare la derivata, rispetto a  $x$ , della seguente funzione:

$$\int_x^{x+2} e^{-t} dt,$$

dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.

7. Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n + 2^{n+1}$$

calcolare il limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2^{2n}}$ .

8. I numeri reali  $a$  e  $b$  sono tali che:  $4,3 < a < 5,2$  e  $-1,7 < b < -1,5$ .

Dire se è vero o falso che risulta:  $5,8 < a - b < 6,9$

e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Considerata la funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , continua e positiva nell'intervallo  $[a ; b]$ , descrivere un algoritmo che calcoli un valore approssimato a meno di  $10^{-3}$  dell'area del trapezoide:

$$T = \{(x,y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

10. Si consideri la seguente funzione in  $x$ :

$$2x + \ln(x) = 0.$$

Dimostrare, col metodo preferito, che ammette una soluzione reale ed una soltanto e descrivere un algoritmo che ne calcoli un valore approssimato a meno di 0,1.

11. In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate la parabola e la retta di equazione rispettivamente  $x = y^2$  e  $x = 1$ . La regione finita  $R$  di piano delimitata dalla parabola e dalla retta è trasformata nella regione  $R'$  dall'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x = 2X - Y + 1 \\ y = -3X + 2Y - 1 \end{cases}$$

L'area di  $R'$  è:

- A)  $\frac{4}{3}$
- B) 4
- C)  $\frac{28}{3}$
- D) un valore diverso dai precedenti

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione.

12. Da un mazzo di carte da gioco "napoletane" (formato da 40 carte distribuite in quattro semi: "coppe", "spade"; "bastoni", "denari") se ne estraggono due a caso. Calcolare la probabilità che fra esse vi sia almeno un "Re".

13. Dimostrare che la primitiva della funzione  $\frac{1}{x}$  della variabile reale  $x$  è la funzione  $\ln|x|$ .

14. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale definita in un intervallo  $J$  e derivabile almeno due volte in  $a \in J$ . Dimostrare che la condizione:

$$f'(a) = 0 \text{ e } f''(a) < 0$$

è sufficiente ma non necessaria per concludere che  $f(x)$  ha un massimo relativo in  $a$ .

1. Quante partite di calcio della serie  $A$  vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Tre scatole  $A$ ,  $B$  e  $C$  contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose.  $A$  contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose,  $B$  ne contiene 500 con il 20% difettose e  $C$  ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?
3. Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema  $2\text{ dm}$ ?
4. Dare un esempio di polinomio  $P(x)$  il cui grafico tagli la retta  $y = 2$  quattro volte.
5. Dimostrare, usando il teorema di *Rolle* [da Michel Rolle, matematico francese (1652-1719)], che se l'equazione:  

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$
 ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:  

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$
6. Si vuole che l'equazione  $x^3 + bx - 7 = 0$  abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di  $b$ ?
7. Verificare l'uguaglianza:  $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$   
 e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di  $\pi$ , applicando un metodo di integrazione numerica.
8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da  $\int_0^1 \pi x^3 dx$ .
9. Di una funzione  $f(x)$  si sa che ha derivata seconda uguale a  $\sin x$  e che  $f'(0) = 1$ .  
 Quanto vale  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$ ?
10. Verificare che l'equazione  $x^3 - 3x + 1 = 0$  ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2003 - sessione ordinaria**

1. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , due a due distinte, se  $x$  ed  $y$  sono sghembe e, così pure, se sono sghembe  $y$  e  $z$  allora anche  $x$  e  $z$  sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
3. Dal punto  $A$ , al quale è possibile accedere, è visibile il punto  $B$ , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza  $AB$ . Dal punto  $A$  si può però accedere al punto  $P$ , dal quale, oltre ad  $A$ , è visibile  $B$  in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza  $PB$ , è tuttavia possibile misurare la distanza  $AP$ . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che  $P$  non è allineato con  $A$  e  $B$ , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza  $AB$ .
4. Il dominio della funzione  $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - (x-1))$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:  
 A)  $-1 < x \leq 3$ ;    B)  $-1 \leq x < 3$ ;    C)  $0 < x \leq 3$ ;    D)  $0 \leq x < 3$ .  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.
5. La funzione  $2x^3 - 3x^2 + 2$  ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.
6. La derivata della funzione  $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$  è la funzione  $f'(x) = 2xe^{-x^4}$ . Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.
7. Considerati i primi  $n$  numeri naturali a partire da 1:  
 $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ ,  
 moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:  
 A)  $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ ;    B)  $\frac{1}{3}n(n^2+1)$ ;    C)  $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$ ;    D)  $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$ .  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.
8.  $x$  ed  $y$  sono due numeri naturali dispari tali che  $x - y = 2$ . Il numero  $x^3 - y^3$ :  
 A) è divisibile per 2 e per 3.  
 B) è divisibile per 2 ma non per 3.  
 C) è divisibile per 3 ma non per 2.  
 D) non è divisibile né per 2 né per 3.  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.
10. Il valore dell'espressione  $\lg_2(3) \cdot \lg_3(2)$  è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2003 - sessione suppletiva**

1. Nota lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.  
(Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.)
2. Nello spazio ordinario sono dati due piani  $\alpha$  e  $\beta$  e una retta  $r$ . Si sa che  $r$  è parallela ad  $\alpha$  e perpendicolare a  $\beta$ . Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di  $\alpha$  e  $\beta$ ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
3. Il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:
  - A.  $x \leq 0$  e/o  $x > 2$ ;
  - B.  $x \leq 0$  e/o  $x \geq 2$ ;
  - C.  $x = 0$  e/o  $x > 2$ ;
  - D.  $x = 0$  e/o  $x \geq 2$ .
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
4. Si consideri un polinomio di grado  $n \geq 2$  nella variabile reale  $x$  con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale  $\alpha$  è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per  $x = \alpha$ .
5. Stabilire se esistono i limiti della funzione  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  per:
  - A.  $x \rightarrow +\infty$ ;
  - B.  $x \rightarrow -\infty$ ;
  - C.  $x \rightarrow 0$ ;
 e, in caso di risposta affermativa, determinarli.
6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite  $x, y, z$ :
 
$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$
 dove  $k$  è un parametro reale.  
 Dire se l'affermazione: «il sistema ammette la sola soluzione  $x = 0, y = 0, z = 0$  per ogni valore di  $k$  diverso da 1» è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.
7. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.
8. In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ) sono date le affinità di equazioni:
 
$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$
 dove  $a, b$  sono parametri reali.  
 Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.
9. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
  - a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
  - b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
  - c) è messa da parte senza guardarne il colore?
10. Considerata l'equazione in  $x$ :
 
$$ax^2 + bx + c = 0$$
 dove  $a, b, c$  sono numeri reali qualsiasi, con  $a \neq 0$ , scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2003 - sessione suppletiva**

1. Tra i rettangoli aventi la stessa area di  $16 \text{ m}^2$  trovare quello di perimetro minimo.
2. Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione  $f(x) = \sin x - 2 \cos x$ ?
3. Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è  $24\pi$ .

4. Provare che se l'equazione  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ha due soluzioni entrambe di valore  $k$ , allora  $k$  è anche soluzione dell'equazione  $y' = 0$  avendo posto  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . A quale condizione  $k$  è anche soluzione di  $y'' = 0$ ?
5. Dare una giustificazione delle formule:  
 $\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$   
 $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha$   
 e utilizzarle per provare che:  
 $\cos 4\alpha = 8 \cos^4\alpha - 8 \cos^2\alpha + 1$ .
6. Dimostrare che l'equazione  $x^5 + 10x + 1 = 0$  ammette una sola soluzione reale.
7. Enunciare il teorema del valor medio o di *Lagrange* [da *Giuseppe Luigi Lagrange* (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.
8. Di una funzione  $f(x)$  si sa che la sua derivata seconda è  $2^x$  e si sa ancora che:  

$$f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2 e f'(0) = 0.$$
 Qual è  $f(x)$ ?
9. Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione  $y = 2e^x - 1$  e dagli assi cartesiani.
10. Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione  $f(x)$  il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2003 - sessione straordinaria**

1. Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:  
 $8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$   
 dove  $k$  è un parametro reale. Calcolare per quali valori di  $k$  il luogo è costituito da:  
 1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.
3. In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:  
 Ⓐ nessuna.  
 Ⓑ una sola.  
 Ⓒ due soltanto.  
 Ⓓ infinite.  
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.
4. In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), è assegnata l'affinità ( $A$ ) di equazioni:  

$$\begin{cases} x = -2X + 3Y \\ y' = X - 2Y \end{cases}.$$
  
 Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità ( $A$ ).
5. Considerata la successione di termine generale:  $a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ , scriverla in forma ricorsiva.
6. Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.
7. Considerata la successione di termine generale:  

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ \frac{1}{3} a_{n-1} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$
  
 calcolare  $\sum_{n=1}^x a_n$ .
8. Considerata la funzione  $f(x)$  tale che:  

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t) dt, \text{ con } x > 0,$$
  
 determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9. Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con  $r_1$  ed  $r_2$  i raggi delle due basi del segmento sferico e con  $h$  la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume  $V$  del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t}) dt}{\operatorname{sen}^2 x}$$

essendo  $e$  la base dei logaritmi naturali.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2003 - sessione straordinaria**

- Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*
- Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*
- Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.
- Dire se è vero che risulta:  $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$  per ogni  $x$  reale e giustificare la risposta.
- Si consideri la funzione polinomiale in  $x$ :  
 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .  
 Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione  $y = a_0 + a_1x$ .
- Si consideri la successione di termine generale  $a_n$  tale che:  

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$
 Calcolare  $a_{100}$ .
- Vedi quesito n. 7 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*
- Vedi quesito n. 8 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*
- Vedi quesito n. 9 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*
- Vedi quesito n. 10 *Questionario P. N. I. 2003 – sessione straordinaria.*

**QUESTIONARIO – P. N. I. 2004 – sessione ordinaria**

- La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
- Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
- Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
- Dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$  quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?
- Dare un esempio di funzione  $g$ , non costante, tale che:  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$  e  $g(2) = 4$ .
- Dare un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1 ; 3)$  e un minimo relativo in  $(-1 ; 2)$ .
- Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
- Si trovino due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.
- Si dimostri che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
- Nel piano è data la seguente trasformazione: 
$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y \\ y' = x + \sqrt{3}y \end{cases}$$

Di quale trasformazione si tratta?

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2004 - sessione ordinaria**

1. Vedi quesito n. 8 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.
3. Vedi quesito n. 6 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.
4. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*. (si consideri soltanto la parte dimostrativa, omettendo la parte del calcolo iterativo)
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.
6. Verificate che le due funzioni  $f(x) = 3 \ln(x)$  e  $g(x) = \ln(2x)^3$  hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
7. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$ . Quale è il valore di  $\gamma$  che massimizza l'area del triangolo?
8. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.
9. Calcolate:  $\int_0^1 \arcsen(x) dx$ .

Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione ordinaria*.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2004 - sessione suppletiva**

1. La funzione  $f(x) = \frac{3x - 2\text{sen}x}{2x - 3\text{sen}x}$  è, per  $x \rightarrow +\infty$ , una forma indeterminata di tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Il limite della funzione, per  $x \rightarrow +\infty$ :  
 A) non esiste;      B) è  $\frac{3}{2}$ ;      C) è  $\frac{2}{3}$ ;      D) è un valore diverso da  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{3}$ .  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.
2. Determinare il più grande valore di  $n$  per cui l'espressione numerica  $\sum_{k=5}^n k$  non supera 10 000.
3. Sia  $F(x)$  una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto  $a$ . Si sa che se  $F'(a) > 0$  allora  $F(x)$  è crescente in  $a$ , mentre se  $F'(a) < 0$  allora  $F(x)$  è decrescente in  $a$ . Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché  $F(x)$  ammetta in  $a$  un massimo relativo è che risulti  $F'(a) = 0$  ed  $F''(a) < 0$ .
4. Risolvere la seguente disequazione in  $x$ :  
 $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ .
5. Considerato un triangolo equilatero di altezza  $h$  e detto  $P$  un suo qualsiasi punto interno, indicare con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  le distanze di  $P$  dai lati del triangolo. La somma  $x + y + z$  risulta:  
 A) sempre maggiore di  $h$ ;  
 B) sempre minore di  $h$ ;  
 C) sempre uguale ad  $h$ ;  
 D) a volte maggiore di  $h$ , a volte minore, a volte uguale.  
 Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.
6. Riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , si consideri l'equazione:  $xy + px + qy + r = 0$ .  
 Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti  $p$ ,  $q$ ,  $r$  (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.
7. Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.
8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , sono assegnate le affinità di equazioni:  

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$
 Tra di esse determinare quella che trasforma il punto  $(1; 0)$  nel punto  $(1; -1)$  e stabilire se ammette rette unite.
9. Due giocatori,  $A$  e  $B$ , giocano a «Testa o Croce» con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma  $S$ . Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: «Il giocatore  $A$  lancia la moneta: se esce «Testa» vince, altrimenti il gioco passa a  $B$ . Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene «Croce», in caso contrario il gioco ritorna ad  $A$ , che ripete il lancio e vince se viene «Testa». In caso contrario il gioco ripassa a  $B$ , che vince se viene «Croce». Se  $B$  non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due giocatori riprende la somma che aveva puntato». Il gioco è equo?

10. Dopo avere spiegato perché la funzione  $f(x) = \frac{1}{x - \cos x}$  è positiva nell'intervallo  $[1 ; 2]$ , esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

**QUESTIONARIO – Ordinamento 2004 - sessione suppletiva**

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
6. Vedi quesito n. 6 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione suppletiva*.
7. Il quadrilatero  $Q''$  avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso  $Q'$  è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero  $Q'$  e darne esauriente dimostrazione.
8. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale  $\int_0^3 f(x) dx$ . È allora possibile calcolare:  
 A)  $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$ ;    B)  $\int_0^3 f(3x) dx$ ;    C)  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$ ;    D)  $\int_0^1 f(3x) dx$ .  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
9. Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x - 1})$ .
10. Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso,  $\alpha$  e  $\beta$ , sono tali che  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$  e  $\text{sen } \beta = \frac{24}{25}$  ne esistono:  
 A) 0;    B) 1;    C) 2;    D) 3.  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2004 - sessione straordinaria**

1. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.
2. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso. Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.
3. Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ .
4. Il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{tg}(x)$ :  
 A) è  $+\infty$ ;  
 B) è  $\frac{\pi}{2}$ ;  
 C) non esiste;  
 D) esiste ma non si riesce a calcolare.  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
5. Si consideri la seguente implicazione: «Se la funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è derivabile nel punto  $a$  allora è continua in  $a$ ». Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni *inversa*, *contronominale* e *contraria* dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.
6. Determinare il più grande valore del parametro reale  $m$  per cui il valore del seguente integrale:  

$$\int_0^m \frac{2x - 3m}{x - 2m} dx$$
 non supera 24.
7. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , è assegnato un triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.
8. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da «1» a «6», aventi tutte le stesse possibi-

lità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un «5». Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

9. Alla finale dei 200  $m$  piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici *Antonio* e *Pietro*. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:
- sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
  - almeno uno dei due finisca sul podio;
  - nessuno dei due finisca sul podio.
10. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le affinità di equazioni:
- $$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$$
- dove  $m$  è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di  $m$ .

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2004 - sessione straordinaria

- Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione straordinaria*.
- Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione straordinaria*.
- Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione straordinaria*.
- Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2004 – sessione straordinaria*.
- Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale  $f(x)$  sia continua nel punto  $a$  è che sia derivabile in  $a$ ».
- Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.
- Indicata con  $S_n$  la somma di  $n$  termini in progressione geometrica, di primo termine  $\frac{1}{2}$  e ragione  $\frac{1}{2}$ , calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ .
- Calcolare il valore della seguente somma:  
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$ .
- In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.
- Alla finale dei 200  $m$  piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici *Antonio* e *Pietro*. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

### QUESTIONARIO – Estero 2004 - sessione ordinaria

- La  $(1; 2)$  è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?
- Sia  $\alpha$  tale che la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  risulti crescente. Provare che  $\alpha \geq \frac{9}{8}$ .
- Mostrare che le tangenti alla curva  $y = \frac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x}$  in  $x = \pi$  e in  $x = -\pi$  si intersecano ad angolo retto.
- Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?
- Calcolare:  $\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$
- Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione  $\frac{x}{10} = \operatorname{sen}(x)$  e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.
- Se  $\operatorname{tg}(\alpha)$  e  $\operatorname{tg}(\beta)$  sono radici di  $x^2 - px + q = 0$  e  $\operatorname{ctg}(\alpha)$  e  $\operatorname{ctg}(\beta)$  sono radici di  $x^2 - rx + s = 0$ , quanto vale il prodotto  $r \cdot s$  espresso in funzione di  $p$  e  $q$ ?
- Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2005 - sessione ordinaria**

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare  $\text{sen } 18^\circ$ ,  $\text{sen } 36^\circ$ .
2. Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva  $y = x \cdot \text{sen } x$  è tangente alla retta  $y = x$  quando  $\text{sen } x = 1$  ed è tangente alla retta  $y = -x$  quando  $\text{sen } x = -1$ .
3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali  $\sigma$  e  $\varphi$  la cui composizione  $\sigma \cdot \varphi$  dia luogo alla traslazione di equazione:
 
$$T = \begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$
 Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso  $\varphi \cdot \sigma$ .
4. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di  $0,4$  litri, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
5. Come si definisce e qual è l'importanza del numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese *John Napier* (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.
6. Le rette  $r$  e  $s$  d'equazioni rispettive  $y = 1 + 2x$  e  $y = 2x - 4$  si corrispondono in una *omotetia*  $\sigma$  di centro l'origine  $O$ . Si determini  $\sigma$ .
7. Come si definisce  $n!$  ( $n$  fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo *combinatorio*? Quale è il suo legame con i *coefficienti binomiali*? Perché?
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = e^t + 2$  e  $y = e^{-t} + 3$  nel suo punto di coordinate  $(3; 4)$ .
9. Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in *sei* lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in *sei* lanci?
10. Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2005 - sessione ordinaria**

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione ordinaria*.
  2. Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione ordinaria*.
  3. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione ordinaria*.
- 
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
  5. Il numero  $e$  di Nepero [nome latinizzato dello scozzese *John Napier* (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di  $e^x$  è  $e^x$ ?
  6. Vedi quesito n. 7 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione ordinaria*.
  7. Se  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$ , per quanti numeri reali  $k$  è  $f(k) = 2$ ? Si illustri il ragionamento seguito.
  8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
  9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:  $\text{sen}^2(35^\circ) + \text{sen}^2(55^\circ)$  ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
  10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione  $f(x) = \arctg x - \arctg \frac{x-1}{x+1}$  è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2005 - sessione suppletiva**

1. È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.
2. Siano  $AB, AC, AD$  tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo  $s$ , calcolare la distanza del vertice  $A$  dal piano dei

punti  $B, C, D$ .

3. *Alberto* e *Gianna* sono chiamati a risolvere la seguente equazione:  $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$ .

*Alberto* ottiene come soluzione gli angoli  $x$  tali che:  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$  oppure  $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$  ( $k$  intero qualsiasi); *Gianna* trova la seguente soluzione:  $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$  ( $k$  intero qualsiasi).

È vero o è falso che *Alberto* ha risolto correttamente e *Gianna* no? Fornire una risposta esauriente.

4. Si consideri la seguente equazione in  $x$ :

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0, \text{ dove } k \text{ è un parametro reale diverso da } 2.$$

Indicate con  $x'$  e  $x''$  le sue radici, calcolare i limiti di  $x' + x''$  quando  $k$  tende a 2, a  $+\infty$  e a  $-\infty$ .

5. Il limite della funzione  $(1-x)^{\frac{1}{x}}$  per  $x \rightarrow 0$ :

- A) è uguale a 1;  
 B) è uguale  $+\infty$ ;  
 C) non esiste;  
 D) è uguale a  $e$ ;  
 E) è uguale a  $\frac{1}{e}$ , con  $e$  la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6. Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è nulla per ogni  $x$  di un dato intervallo  $J$ , allora  $f(x)$  è costante in  $J$ .
7. Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  non necessariamente ammette primitiva in  $[a; b]$ .
8. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?
9. Si consideri il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove  $a$  è un parametro reale. Il sistema è:

- A) determinato per ogni valore di  $a$ ;  
 B) indeterminato per un valore di  $a$  e impossibile per un valore di  $a$ ;  
 C) indeterminato per nessun valore di  $a$ , ma impossibile per un valore di  $a$ ;  
 D) impossibile per nessun valore di  $a$ , ma indeterminato per un valore di  $a$ .

Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

10. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x + my - 1 \\ y' = mx - 2y - 2 \end{cases}$$

dove  $m$  è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2005 - sessione suppletiva

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione suppletiva*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione suppletiva*
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione suppletiva*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione suppletiva*
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione suppletiva*
6. Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale  $f(x)$  avente le seguenti caratteristiche:  
 $f(1) = 1, f'(1) = 0, f''(1) < 0$ .
7. In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le rette  $r$  ed  $s$  di equazioni rispettivamente  $2x + my = 1$  e  $mx - 2y = 2$ , dove  $m$  è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di  $m$ ?
8. È vero o falso che le due funzioni  $\ln(x^2 - 4)$  e  $\ln(x + 2) + \ln(x - 2)$  hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazio-

ne della risposta.

9. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio  $(a + b)^{10}$ , ordinati secondo le potenze decrescenti di  $a$  e crescenti di  $b$ , sono rispettivamente:  
 $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}$ .  
 Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.
10. Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2005 - sessione straordinaria

1. Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano  $\alpha$  equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano  $\alpha$ .
2. Sia  $ABC$  un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati  $ABDE$ ,  $BCFG$  e  $CAHL$ . Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli  $AHE$ ,  $BDG$  e  $CFL$  sono equivalenti al triangolo  $ABC$ .
3. Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:  $\log_2 27 + \log_2 12$  e  $2 + \log_2 81$ .  
 Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.
4. Dimostrare che ogni funzione del tipo  $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ , dove  $a, b, c$  sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?
5. Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:  

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2,$$
 la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «teorema di Nicomaco» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).
6. Il limite della funzione  $\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$  per  $x \rightarrow +\infty$  è:  
 A)  $e$ ,  
 B)  $\frac{1}{e}$ ,  
 C)  $\sqrt{e}$ ,  
 D)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ,  
 dove « $e$ » è la base dei logaritmi naturali.  
 Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.
7. Calcolare la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione:  $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sin(t)}$ .
8. Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione  $x^3 + x + 1 = 0$  ammette una e una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.
9. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?
10. Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il «47» sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2005 - sessione straordinaria

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione straordinaria*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione straordinaria*
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione straordinaria*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2005 – sessione straordinaria*
5. Determinare il più grande valore dell'intero  $n$  per cui l'espressione  $\sum_{k=0}^n 3^k$  non supera 10 000.

6. Dimostrare che il limite di  $\cos(x)$ , per  $x$  tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.
7. Determinare il dominio di derivabilità della funzione  $f(x) = |x^2 - 1|$
8. Sia  $f(x)$  una funzione continua per ogni  $x$  reale tale che  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

9. Dimostrare la seguente formula:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

dove  $n, k$  sono numeri naturali tali che  $0 < k < n$ . Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del «triangolo di Tartaglia» (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla.

10. Calcolare quante sono le possibili «cinquine» che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

### QUESTIONARIO - Estero 2005

1. Indicata con  $S_n$  la somma di  $n$  termini in progressione geometrica di primo termine  $\frac{1}{2}$  e ragione  $\frac{1}{2}$  si calcoli il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ .
2. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 8 cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:1? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?
3. Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un parallelepipedo a base quadrata, quali ne sono le dimensioni minime?
4. Quale è il cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
5. Quando una funzione  $f$  è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione inversa  $f^{-1}$ ? Fai un esempio.
6. Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.
7. Trovare il periodo della funzione:  $y = \text{sen}\left(\frac{2}{3}x\right) + \text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$
8. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

### QUESTIONARIO - Australe 2005 – sessione ordinaria

1. Prova che fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.
2.  $S_n$  indica la somma di  $n$  termini in progressione geometrica di primo termine  $\frac{1}{3}$  e ragione  $\frac{1}{3}$ . Calcola il  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ .
3. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 10 cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?
4. Considera la cubica  $y = x^3$  e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l'aggiunta ad  $x^3$  di un termine  $kx$  al variare di  $k$  nell'insieme dei numeri reali.
5. Due lati di un triangolo misurano  $a$  e  $b$ . Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima.
6. Calcola la derivata della funzione  $y = \arctan x + \arctan (1/x)$ . Cosa puoi dire della funzione? È costante? Illustra il perché della tua risposta.
7. Vedi quesito n. 6 *Questionario Estero 2005*
8. Vedi quesito n. 5 *Questionario Estero 2005*

### QUESTIONARIO - Australe 2005 – sessione suppletiva

1. L'equazione  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  esprime il teorema del valore medio o di Lagrange. Determinare  $c$  quando  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $a = 0$  e  $b = 1$ .
2. Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in metri?

3. Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?
4. La funzione  $f(x) = 10^{x+8}$  è invertibile? Perché? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa  $f^{-1}$ ?
5. Dimostrare che la funzione  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in  $]0; 1]$ . In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali  $-1$ ?
6. Fra tutte le primitive di  $f(x) = 3 \cos^3(x)$  trovare quella il cui grafico passa per il punto  $(0; 5)$ .
7. Spiegare perché l'equazione  $3^x = -x^2 + 5x - 8$  non ammette soluzioni.
8. Perché tutte le tangenti alla curva d'equazione  $y = x^3 + 3x - 4$  formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse  $x$ ? Illustra le ragioni della tua risposta.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2006 - sessione ordinaria**

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla  $64^a$  casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. In un piano sono dati una retta  $r$  e due punti  $A$  e  $B$  a essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine  $r$ . Si trovi il più breve cammino che congiunga  $A$  con  $B$  toccando  $r$ .
4. Si dimostri che l'equazione  $\sin x = x - 1$  ha una e una sola radice  $\alpha$  e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare  $\alpha$  con la precisione voluta.
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di  $(a + b)^n$  è uguale a  $2^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
6. L'equazione risolvente un dato problema è:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  dove  $k$  è un parametro reale e  $x$  ha le seguenti limitazioni:  $15^\circ < x < 45^\circ$ . Si discuta per quali valori di  $k$  le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: «che cos'è la probabilità?» era solito rispondere: «la probabilità non esiste!». Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla a una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?
8. Un tiratore spara ripetutamente a un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità 0,99 di colpirlo almeno una volta?
9. Della funzione  $f(x)$  si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che:  $f'(x) = f(x)$  e  $f(0) = 1$ . Puoi determinare  $f(x)$ ?
10. Tenuto conto che:  $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  calcola un'approssimazione di  $\pi$  utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2006 - sessione ordinaria**

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di  $50 \text{ cm}^2$ , margini superiore e inferiore di  $4 \text{ cm}$  e margini laterali di  $2 \text{ cm}$ . Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.
6. Vedi quesito n. 6 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.
7. La funzione  $f(x) = x^3 - 2x^2$  soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0; 1]$ ? Se sì, trova il punto  $\xi$  che compare nella formula:  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .
8. La funzione  $f(x) = \text{tg}(x)$  assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo  $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right]$  eppure non esiste alcun

$x \in I$  tale che  $f(x) = 0$ . È così? Perché?

9. Vedi quesito n. 9 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.

10. La funzione  $f(x) = a \sin x + b \cos x$  ha un estremo relativo per  $x = \frac{4\pi}{3}$  ed è  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$ . Si trovino  $a$  e  $b$  e si dica qual è il periodo di  $f(x)$ .

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2006 - sessione suppletiva

1. Si considerino il rettangolo  $ABCD$  e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta  $AD$ , il vertice nel punto medio del lato  $AB$  e passante per i punti  $C$  e  $D$ . In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume  $V'$  e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta  $CD$  genera un solido di volume  $V''$ . Determinare il rapporto  $V'/V''$ .

2. Il numero delle soluzioni dell'equazione  $\sin 2x \cos x = 2$  nell'intervallo reale  $[0; 2\pi]$  è:

A) 0.                      B) 2.                      C) 3.                      D) 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3. Il limite della funzione  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , per  $x \rightarrow 0$ :

A) non esiste.            B) è  $+\infty$ .            C) è 0.                    D) è un valore finito diverso da 0.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4. Dimostrare che la funzione  $f(x) = x^a$ , dove  $a$  è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5. Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli-Cauchy:

*Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$ , è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.*

Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6. Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

dove  $c$  è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7. Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al «primo».

8. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9. Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, non sia di plastica nera.

10. In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

### QUESTIONARIO - ordinamento 2006 - sessione suppletiva

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione suppletiva*

2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione suppletiva*

3. Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione suppletiva*

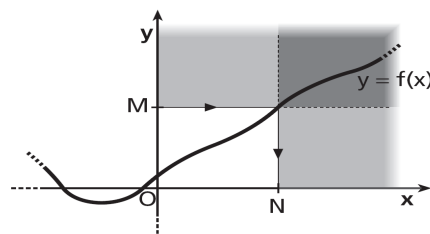
4. Trovare, con il procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ .

5. Vedi quesito n. 7 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione suppletiva*

6. Determinare il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7. Considerata la funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , affermare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  significa che per ogni numero reale  $M$ , esiste un numero reale  $N$  tale che, per ogni  $x$ , se  $x > N$  allora  $f(x) > M$ . È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8. È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo  $L$ . Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un  $n$ -esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo  $(n-1)$ -



*esimo*. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli  $n$  triangoli quando  $n$  tende a  $\infty$ .

9. Si consideri la seguente uguaglianza:  $\ln(2x+1)^4 = 4 \ln(2x+1)$ . È vero o falso che vale per ogni  $x$  reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
10. Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno a un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia «1», posta a capotavola, è riservata al ragazzo «1», che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2006 - sessione straordinaria

1. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo  $L$ . Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).
2. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.
3. Se le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , entrambe tendenti a 0, quando  $x \rightarrow a$ , non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$  quando  $x \rightarrow a$ . È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
4. Il limite della funzione,  $f(x) = x - \ln x$ , per  $x \rightarrow +\infty$  è:  
 A) 0. B) un valore finito diverso da 0. C)  $+\infty$ . D)  $-\infty$ .  
 Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.
5. Il limite della funzione  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ , per  $x \rightarrow 0$ , è uguale a 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.
6. Si ricorda la seguente definizione: «Considerata una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo  $I$ , ogni funzione, derivabile in  $I$  e tale che  $F'(x) = f(x)$ , si dice primitiva di  $f(x)$  in  $I$ ». Stabilire se la funzione:  

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$
 ammette primitiva nell'intervallo  $[1; 3]$ .
7. Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:  
 $x^5 + x^3 + 1 = 0$   
 ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo  $[z; z+1]$  al quale appartiene tale soluzione, essendo  $z$  un numero intero.
8. Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di  $10^{-3}$ , della soluzione reale della precedente equazione.
9. Si considerino le seguenti equazioni:  
 $x' = ax - (a-1)y + 1, \quad y' = 2ax + (a-1)y + 2,$   
 dove  $a$  è un parametro reale.  
 Determinare i valori di  $a$  per cui le equazioni rappresentano:  
 1) un'affinità,  
 2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice equivalente se conserva le aree).
10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda «Antonio» e almeno una «Maria»?

### QUESTIONARIO - ordinamento 2006 - sessione straordinaria

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione straordinaria*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione straordinaria*
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione straordinaria*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione straordinaria*
5. Dimostrare che la derivata, rispetto a  $x$ , della funzione  $\arctg(x)$  è  $\frac{1}{1+x^2}$ .
6. Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione  $f(x) = \sqrt{x^2}$ ,

nell'intervallo  $[-1; 1]$ .

7. Vedi quesito n. 7 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione straordinaria*
8. Considerata l'equazione:  $x^5 + x^3 + 1 = 0$ , spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.
9. Considerata l'equazione:  $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(2x) = 12$ , spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.
10. Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio»?

**QUESTIONARIO - estero 2006 - sessione ordinaria**

1. Calcolare la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $f(x) = \sin^2(2x)$ .
2. Si consideri la seguente proposizione:  
*Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali.*  
Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.
3. Si indichi con  $\alpha$  l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di  $\alpha$ , espressa in radianti:  
[A] è  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ; [B] è  $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ ; [C] è  $\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ; [D] un valore diverso.  
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
4. Considerata l'equazione:  $x^4 + x - 2 = 0$ , spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.
5. In un cono equilatero di apotema  $a$  inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.
6. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo  $J$ , tranne che nel punto  $a$  di  $J$ , dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione  $f(x)$  è costante in  $J$ ? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.
7. Si consideri il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$   
Esso è uguale a: [A]  $e^2$ ; [B]  $\frac{1}{e^2}$ ; [C]  $\sqrt{e}$ ; [D]  $\frac{1}{\sqrt{e}}$   
dove “ $e$ ” è il numero di Nepero.  
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

**QUESTIONARIO - estero 2006 - sessione suppletiva**

1. Si sa che  $G(0) - F(0) = 3$ , essendo  $F(0)$  e  $G(0)$  due primitive di  $y = x^2$  e  $y = x$  rispettivamente. Quanto vale  $G(1) - F(1)$ ?
2. Quanti sono i numeri di tre cifre (distinte fra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?
3. La somma di due numeri è  $s$ ; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia massimo.
4. Fra tutti i coni iscritti in una data sfera, trovare quello di volume massimo.
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario P. N. I. 2006 – sessione ordinaria*.
6. Si consideri la funzione  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$  e la tangente  $t$  al suo grafico nel punto di ascissa  $x = 2$ . Quale è la pendenza di  $t$ ?
7. È data l'equazione  $x^2 - 2(k-1)x + 4 = 0$ . Dire per quali valori positivi del parametro  $k$  una o entrambe le radici sono reali.
8. La funzione  $f(x) = a \sin x + bx$  è tale che  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sqrt{3} \frac{\pi}{6}$  e presenta un massimo relativo nello stesso punto. Si trovino  $a$  e  $b$  e si dica se  $f(x)$  è periodica.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2007 - sessione ordinaria**

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolvibile o

meno.

2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione  $y = \ln x$  e l'asse  $x$ , con  $1 \leq x \leq e$ , è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di  $S$  e se ne dia un valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .
3. Si dimostri che l'insieme delle omotetie con centro  $O$  fissato è un *gruppo*.

4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e come tali parametri influenzino il grafico di  $f(x)$ .

5. Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria non-euclidea. Quali le formulazioni nella geometria iperbolica e in quella ellittica? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto  $P$  all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di  $P$  da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola  $y = x^2 + 1$  nel punto  $(1; 2)$ .
8. A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione  $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$  ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani e paralleli*, a *latitudini e longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera  $S$  e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta  $r$  passante per il centro di  $S$ , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

### QUESTIONARIO - ordinamento 2007 - sessione ordinaria

1. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 2\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 1$  (in figura) è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .
2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione:  $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$ .
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione  $y = x^3 + 8$  soddisfa le condizioni del Teorema del valor medio (o Teorema di Lagrange) sull'intervallo  $[-2; 2]$ . Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo  $p$  di un abito ha subito una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se  $f(x)$  è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo  $[-2; 2]$ , che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione  $3 + f(x)$ ?
8. Si risolva l'equazione:  $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$ .
9. Si calcoli l'integrale indefinito  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  e, successivamente, si verifichi che il risultato di  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Vedi quesito n. 10 *Questionario P. N. I. 2007 - sessione ordinaria*

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2007 - sessione suppletiva

1. Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle  $x$  della regione finita di piano delimitata dalla curva  $y = \frac{2}{x}$  e dalla retta di equazione  $y = -x + 3$ .
2. Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \operatorname{sen}^3 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ .
3. Data la funzione  $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$ , nell'intervallo chiuso  $[1; 2]$ , si determini il valore di  $k$  per il quale sia a essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
4. Si consideri la seguente proposizione: «In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
5. Si dimostri che l'equazione  $e^x - x^3 = 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
6. Si scelga a caso un punto  $P$  all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.
7. Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi  $a, b$  è  $S = \pi ab$ .
8. Si calcoli il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$ .
9. Si verifichi che la curva di equazione  $y = x^3 + 3x^2 - 1$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.
10. Si risolva la disequazione  $5 \binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$ .

---

**QUESTIONARIO - ordinamento 2007 - sessione suppletiva**


---

1. Si calcoli il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$ .
2. Si determini il campo di esistenza della funzione  $y = \operatorname{arcsen}(tg x)$ , con  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
3. Si calcoli il valore medio della funzione  $y = tg^2 x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .
4. Si provi che per la funzione  $f(x) = x^3 - 8$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2$ , sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.
5. Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio  $r$ , si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.
6. Si consideri la seguente proposizione: «Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
7. Sia data la funzione:  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$   
Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.
8. Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione  $y = e^x$ , dalla curva di equazione  $y = x^3$  e dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ .
9. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 2}$ .
10. Si risolva la disequazione  $\binom{x}{3} > \frac{15}{2} \binom{x}{2}$ .

---

**QUESTIONARIO - Australe 2007 - sessione ordinaria**


---

1. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di  $R$  in  $R$ :  
 $f: x \rightarrow 3^{x+1}$ ;  $g: x \rightarrow 3^x + 1$ ;  $h: x \rightarrow 3^{|x|}$ ;  $k: x \rightarrow 3^{-x}$
2. Quante cifre ha il numero  $5^{59}$  nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

3. Si consideri una sfera di volume  $V$  e superficie  $S$ . Si dimostri che il tasso di variazione di  $V$  rispetto al raggio è uguale a  $S$ .
4. Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo  $\binom{m}{n}$  e si risolva l'equazione:  $2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2}$  con  $x \in \mathbb{N}$ .
5. La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
6. Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.
7. Si dia una definizione di "asintoto" – *orizzontale, obliquo, verticale* – di una curva e si fornisca un esempio di funzione  $f(x)$  il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.
8. La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione  $2\sin(x) + k \cos(x) = 1$  ove  $k > 0$  e  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ . Si discutano le possibili soluzioni del problema.

### QUESTIONARIO - Europa 2007 - sessione ordinaria

1. Si calcolino le radici dell'equazione:  $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$
2. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ :  
 $f: x \rightarrow 2^{x+1}$ ;  $g: x \rightarrow 2^x + 1$ ;  $h: x \rightarrow 2^{|x|}$ ;  $k: x \rightarrow 2^{-x}$
3. Quante cifre ha il numero  $7^{60}$  nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.
4. La formula seguente:  $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$   
 È dovuta a *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ? Si illustri il ragionamento seguito.
5. Si vuole che delle due radici reali dell'equazione:  $x^2 + 2(h+1)x + m^2h^2 = 0$  una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri  $h$  e  $m$ ?
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione  $f(x)$  è, in ogni suo punto  $P$ , uguale al doppio dell'ascissa di  $P$ . Si determini  $f(x)$ , sapendo che  $f(0) = 4$ .
7. Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio  $r$ , quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità  $r\sqrt{2}$ ?
8. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

### QUESTIONARIO - Americhe 2007 - sessione ordinaria

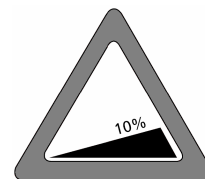
1. Si dimostri che fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.
2. Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe?
3. Si calcolino le radici dell'equazione:  $3^{x+3} + 9^{x+1} = 10$
4. Vedi quesito n. 1 *Questionario - Australe 2007 - sessione ordinaria*
5. Siano  $a$  e  $b$  due numeri positivi diversi da 1. Si dimostri che:  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ .
6. Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione  $f(x)$  è, in ogni punto  $P$ , uguale al quadruplo della radice cubica dell'ascissa di  $P$ . Si determini  $f(x)$ , sapendo che il grafico passa per il punto  $A(-1; 0)$ .
7. Un cerchio ha raggio 1 metro. Quanto misura il lato del decagono regolare in esso inscritto? E quale è la misura del lato del decagono circoscritto?
8. Il valore della seguente espressione:  $\int_0^1 \arccos x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2\operatorname{arcsens} x) \, dx$  è  $\frac{\pi-1}{2}$ .  
 Spiegarlo in maniera esauriente.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2008 - sessione ordinaria**

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .
3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare a un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
4. Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$ .
5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane  $(x; y)$  si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta:  $y^2 - x^3 > 0$ .
6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.
7. Perché è geometria "non" euclidea? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.
8. Sia  $f$  la funzione definita da  $f(x) = \pi^x - x^\pi$ . Si precisi il dominio di  $f$  e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto  $x = \pi$ .
9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?
10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di  $y = e^{-2x}$ ? Qual è quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2008 - sessione ordinaria**

1. Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2008 - sessione ordinaria*
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie  $S$  (quella laterale più il fondo) qual'è quella di volume massimo?
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2008 - sessione ordinaria*
5. Si determini un polinomio  $P(x)$  di terzo grado tale che:  $P(0) = P'(0) = 0$ ,  $P(1) = 0$  e  $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{12}$ .
6. Se  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ , con  $n > 3$ , sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?
7. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione:  $x^3 - 3x^2 + k = 0$ .
8. Vedi quesito n. 8 *Questionario - P. N. I. 2008 - sessione ordinaria*
9. Sia  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ ; esiste  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo.  
La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)?  
Quale la percentuale da riportare sul segnale?

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2008 - sessione suppletiva**

1. Si determinino le costanti  $a$  e  $b$  in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

- risultati continua e derivabile nel punto  $x = 0$ .
- 2) Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine  $\lambda = 23^\circ 27'$  nord)?
  - 3) Si determini il numero reale positivo  $\lambda$  in modo che la curva rappresentativa della funzione  $g(x) = e^{-\lambda x}$  divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione  $f(x) = e^{2x}$ , dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = 0$  e  $x = 1$ .
  - 4) Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata, si ottenga 4 volte testa.
  - 5) Si dimostri che l'equazione  $(3 - x)e^x - 3 = 0$  per  $x > 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
  - 6) Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio  $r$  è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.
  - 7) Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \arccos(\sqrt{1-x^2})$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
  - 8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti  $A(0; 1)$ ,  $B(0; 4)$ . Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto  $C$  dal quale il segmento  $AB$  è visto con un angolo di massima ampiezza.
  - 9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:  $\int_1^{\sqrt{\ln x}} \frac{e^t}{t^2} dt$  nel punto  $P$  di ascissa  $x = e$ .
  - 10) Tenuto conto che:  $\frac{\pi}{6} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$   
si calcoli un'approssimazione di  $\pi$ , utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2008 - sessione suppletiva**

1. Si determini la distanza delle due rette parallele:  
 $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$                        $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$
2. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio  $r$  in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza  $x$  dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.
3. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:  
 $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$
4. Si calcoli il limite della funzione:  $\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)}$  quando  $x$  tende a 0.
5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
6. Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
7. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$  e dall'asse  $x$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$  è la base di un solido  $S$  le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di  $S$ .
8. Si stabilisca per quali valori del parametro reale  $k$  esiste una piramide triangolare regolare tale che  $k$  sia il rapporto fra la sua apotema e lo spigolo di base.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:  $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin(x)}$  nel punto  $P$  di ascissa  $x = \frac{\pi}{2}$ .
10. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti  $P(I + t^2; I + t^2)$ , ottenuto al variare di  $t$  nei reali.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2008 - sessione straordinaria**

1. Fra le piramidi quadrangolari regolari di data area laterale  $S$ , si determini quella di volume massimo.
2. Si calcoli il limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$ .
3. Si provi se per la funzione  $f(x) = |x + 1| - 2x$ , nell'intervallo  $[-2; 3]$ , sono verificate le condizioni previste per la validità del teorema di Lagrange e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

4. Si determini il campo di esistenza della funzione  $y = (x^2 + 3x)^{\sqrt{-2-x}}$ .
5. Siano dati un triangolo equilatero, il cerchio in esso inscritto e il triangolo equilatero inscritto nel cerchio. Si scelga a caso un punto all'interno del triangolo maggiore: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al triangolo minore.
6. Alla prova orale di un concorso sono stati ammessi 9 maschi e 7 femmine. Sappiamo che saranno assunte 5 persone. Qual è la probabilità che siano assunti 2 maschi e 3 femmine?
7. Si dimostri che l'equazione  $\ln x + x = 0$  ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
8. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:  $f(x) = \int_1^x te^t dt$
9. Il toro è il solido di rotazione, ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio  $r$  di un giro completo attorno ad un asse, che abbia dal centro del cerchio generatore una distanza  $a > r$ . Si calcolino l'area e il volume del toro.
10. Un segmento  $AB$  di lunghezza costante a scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse  $x, y$ . Si dimostri che il punto  $P$  qualsiasi del segmento descrive un'ellisse avente gli assi sopra  $x, y$ . Che cosa succede se  $P$  è il punto medio di  $AB$ ?

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2008 - sessione straordinaria**

1. Si determinino le costanti  $a$  e  $b$  in modo che la funzione  $F(x) = a \cos x + b \cos^3 x$ , sia una primitiva della funzione  $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x$ .
2. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$ .
3. Fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto, avente raggio di base  $r$  e altezza  $h$ , si trovi quello di volume massimo.
4. Si consideri la funzione:
 
$$f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{\sqrt{4x^2}}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 2 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
 se ne studi la continuità nel punto  $x = 0$  e poi si tracci il suo grafico.
5. Si consideri la seguente proposizione: "Due piani  $\alpha$  e  $\beta$  sono tra loro perpendicolari se e solo se ogni retta di  $\alpha$  è perpendicolare ad ogni retta di  $\beta$ ". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
6. Si determini, in base alla definizione, la derivata della funzione  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$  in  $x = \frac{\pi}{4}$ .
7. Si provi che alla funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi$ , non è applicabile il teorema di Rolle.
8. Si calcoli il valore medio della funzione  $y = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
9. Si determini il campo di esistenza della funzione  $y = \log(\sqrt{x^2 - 2x - x + 4})$ .
10. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{e^{\sin(x)} - \cos x}{e^{\cos(x)} - e \log(x + e)}$ , quando  $x$  tende a 0.

**QUESTIONARIO - Europa 2008 - sessione ordinaria**

1. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 7\sqrt[3]{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di  $S$ .
2. Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di  $k$ , il numero delle soluzioni reali dell'equazione:  $x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0$
4. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema 50 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.
5. Si dimostri che l'equazione  $x^7 + 5x + 5 = 0$  ha una sola radice reale.
6. Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di  $R$  in  $R$ :  $f: x \rightarrow 5^{x+1}$ ;  $g: x \rightarrow 5^x + 1$ ;  $h: x \rightarrow 5^{|x|}$ ;  $k: x \rightarrow 5^{-x}$

7. Quale significato attribuisce al simbolo  $\binom{n}{k}$ ? Esiste un  $k$  tale che  $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$ ?
8. Dimostra che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

**QUESTIONARIO - Americhe 2008 - sessione ordinaria**

1. Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150 m con un percorso di 3 km. Quale è la sua inclinazione?
2. Vedi quesito n. 3 *Ordinamento 2008 - sessione straordinaria*.
3. Quale significato attribuisce al simbolo  $\binom{n}{k}$ ? Esiste un  $k$  tale che  $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$ ?
4. Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.
5. Si calcolino il numero delle soluzioni dell'equazione:  $|x^2 - x| = k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
6. Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?
7. Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate reali  $P(x; x)$  e  $Q(x; \sqrt{4-x^2})$  si determini, al variare di  $x$ , l'insieme dei punti  $Q$  la cui ordinata è minore dell'ordinata di  $P$ .
8. La regione  $R$  delimitata dal grafico di  $y = 12\sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di  $S$ .

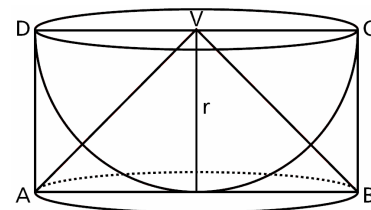
**QUESTIONARIO - Australe 2008 - sessione ordinaria**

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
2. Si calcoli e si interpreti geometricamente l'integrale definito:  $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx$ .
3. La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.
4. Si dia un esempio, almeno, di polinomio  $P(x)$  il cui grafico tagli la retta  $y = 3$  in 3 punti distinti.
5. Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari?
6. Si determinino le costanti  $a, b, c$  in modo che le curve di equazioni  $f(x) = x^2 + ax + b$  e  $g(x) = x^3 + c$  siano tangenti nel punto  $A(1; 0)$ . Si determini l'equazione della tangente comune.
7. Il cono  $W$  e il cilindro  $T$ , circolari retti, hanno uguale raggio  $r$  di base e uguale altezza  $h$ . Si calcoli il limite del rapporto delle rispettive superfici totali al tendere di  $r$  a zero.
8. Si provi che le espressioni  $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  e  $y = \sqrt{3} \sin(x) + \cos(x)$  definiscono la stessa funzione  $f$ . Di  $f$  si precisi: dominio, codominio e periodo.

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria**

1. Siano:  $0 < a < b$  e  $x \in [-b; b]$ . Si provi che  $\int_{-b}^b |x-a| dx = a^2 + b^2$ .
2. Sono dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di  $A$  in  $B$ , ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).
4. «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:  $\frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, 0^0$ .  
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione  $\text{sen } x = 0$ , con punto iniziale  $x_0 = 3$ . Cosa si ottiene dopo due iterazioni?
7. Si dimostri l'identità  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$  con  $n$  e  $k$  naturali e  $n > k$ .
8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?
9. Nei Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama scodella considerando una semisfera di raggio  $r$  e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice  $V$  in figura.
10. «Se due punti  $P$  e  $Q$  del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta  $AB$  e gli angoli  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{QBA}$  hanno somma minore di  $180^\circ$ , allora le semirette  $AP$  e  $BQ$ , prolungate adeguatamente al di là dei punti  $P$  e  $Q$ , si devono intersecare.» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



**QUESTIONARIO - Ordinamento 2009 - sessione ordinaria**

1. Si trovi la funzione  $f(x)$  la cui derivata è  $\text{sen } x$  e il cui grafico passa per il punto  $(0 ; 2)$ .
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria*
3. Per quale o quali valori di  $k$  la curva d'equazione  $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$  ha una sola tangente orizzontale?
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria*
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria*
6. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ .
7. Vedi quesito n. 7 *Questionario - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria*
8. Si provi che l'equazione:  
 $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ .  
ha una radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .
9. Vedi quesito n. 9 *Questionario - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria*
10. Si determini il periodo della funzione  $f(x) = \cos 5x$ .

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria**

1. Sia  $p(x)$  un polinomio di grado  $n$ . Si dimostri che la sua derivata  $n$ -esima è  $p^{(n)}(x) = n! a_n$  dove  $a_n$  è il coefficiente di  $x^n$ .
2. Siano  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ ,  $r$  la retta perpendicolare in  $B$  al piano del triangolo e  $P$  un punto di  $r$  distinto da  $B$ . Si dimostri che i tre triangoli  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  sono triangoli rettangoli.
3. Sia  $r$  la retta d'equazione  $y = ax$  tangente al grafico di  $y = e^x$ . Qual'è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta  $r$  forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$ . Come si può essere certi che esiste un unico zero?
5. Sia  $G$  il grafico di una funzione  $x \rightarrow f(x)$  con  $x \in R$ . Si illustri in che modo è possibile stabilire se  $G$  è simmetrico rispetto alla retta  $x = k$ .
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto  $P$  di coordinate  $(3\cos t ; 2\sin t)$  al variare di  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenta la risposta.
8. Se  $n > 3$  e  $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$  sono in progressione aritmetica, qual è il valore di  $n$ ?
9. Si provi che non esiste un triangolo  $ABC$  con  $AB=3, AC=2$  e  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ . Si provi altresì che se  $AB=3, AC=2$  e  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ,

allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione  $R$  delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$ .

L'integrale  $\int_0^4 2\pi x(\sqrt{x}) dt$  fornisce il volume del solido:

- a) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $x$ ;
  - b) generato da  $R$  nella rotazione intorno all'asse  $y$ ;
  - c) di base  $R$  le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi di raggio  $\sqrt{x}$ ;
  - d) nessuno di questi.
- Si motivi esaurientemente la risposta.

**QUESTIONARIO - Ordinamento 2010 - sessione ordinaria**

- 1. Vedi quesito n. 1 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria*
- 2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria*
- 3. Sia  $\gamma$  il grafico di  $f(x) = e^{3x} + 1$ . Per quale valore di  $x$  la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x; f(x))$  ha pendenza uguale a 2?
- 4. Si calcoli:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .
- 5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
- 6. Si determini il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .
- 7. Per quale o quali valori di  $k$  la funzione 
$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4 & \text{per } x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
 è continua in  $x = 4$ ?
- 8. Vedi quesito n. 8 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria*
- 9. Vedi quesito n. 9 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria*
- 10. Si consideri la regione delimitata da  $y = \sqrt{x}$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 4$  e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse  $y$ .

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva**

- 1. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a  $18^\circ$  e  $24^\circ$ . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.
- 2. Considerata la funzione  $f(x) = \frac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$ , dove  $a$  è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .
- 3. Su un piano orizzontale  $\alpha$  si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è  $r$  e l'altezza  $2r$ , e una sfera di raggio  $r$ . A quale distanza  $x$  dal piano  $\alpha$  bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale  $\beta$ , perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?
- 4. Si dimostri che per gli zeri  $x_1$  e  $x_2$  di una funzione  $f(x) = ax^2 + bx + c$  vale la relazione  $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$  e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.
- 5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , nell'intervallo  $1 \leq x \leq 2$ .
- 6. Si determini il punto della parabola  $4y = x^2$  più vicino al punto di coordinate  $(6; -3)$ .
- 7. Si consideri l'equazione  $x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$ .  
Si dimostri che essa ammette una soluzione reale  $x_0$  tale che  $1 < x_0 < 2$ . Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini  $x_0$  a meno di  $1/100$ .
- 8. Nel piano cartesiano  $Oxy$  è dato il cerchio  $C$  con centro nell'origine e raggio  $r = 3$ ; siano  $P(0; 3)$  e  $Q(2; \sqrt{5})$  punti di  $C$ . Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse  $x$  del quadrilatero mistilineo  $PORQ$  ( con  $R$  proiezione di  $Q$  sull'asse  $x$ ).
- 9. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo  $l$  e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si de-

termini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

10. Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è  $27/38$  ?

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2010 - sessione suppletiva

Vedi quesito n. 1 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva*

Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva*

Vedi quesito n. 3 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva*

Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva*

Vedi quesito n. 5 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione suppletiva*

6. Si determinino  $a$  e  $b$  in modo tale che il grafico della funzione  $y = a^{x+b}$  passi per i punti del piano  $xy$  di coordinate  $(1 ; 4)$  e  $(3 ; 8)$ .
7. Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza  $l$ . Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.
8. Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche  $x = 2t$  e  $y = \frac{2}{t^2 + 1}$  nel suo punto di coordinate  $(2 ; 1)$ .
9. Si dimostri che se una funzione  $f(x)$  è derivabile nel punto  $x_0$ , ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.
10. Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

### QUESTIONARIO - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria

1. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di  $15^\circ$ . Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, qual'è la distanza tra i due osservatori?
2. Si calcoli il limite della funzione  $(1 + \tan x)^{\cot x}$  quando  $x$  tende a 0.
3. In quanto modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo circolare?
4. Si dimostri che ogni funzione  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , dove  $a, b, c, d$  sono valori reali con  $a \neq 0$ , ha un massimo e un minimo relativi oppure non ha estremanti.
5. Si calcoli il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse  $x$  del triangolo di vertici  $A(2 ; 2)$ ,  $B(6 ; 4)$ ,  $C(6 ; 6)$ .
6. I vertici di un triangolo sono:  $O(0 ; 0)$ ,  $A(0 ; 2)$ ,  $B(1 ; 1)$ . Si trovi l'equazione della circonferenza  $\gamma$  inscritta nel triangolo  $OAB$  e quella della circonferenza  $\gamma'$  ad esso circoscritta.
7. Si verifichi che la cubica di equazione  $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$  è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.
8. Si dimostri che l'equazione  $\frac{1}{x} - e^x = 0$  ha un'unica radice reale e se calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
9. Una rappresentanza di cinque persone deve essere scelta a caso tra dieci uomini e tre donne. Qual'è la probabilità che il comitato sia costituito da tre uomini e due donne?
10. Sia data l'ellisse di equazione:
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- e il rombo in essa inscritto, con i vertici coincidenti con quelli dell'ellisse. Si scelga a caso un punto all'interno dell'ellisse: si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al rombo.

### QUESTIONARIO - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

5. Vedi quesito n. 5 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

6. Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:

$$2 + 2^x = \sin^4 x + \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x$$

7. Sia  $P$  un punto del piano di coordinate  $\left(t + \frac{1}{t}; t - \frac{1}{t}\right)$ . Al variare di  $t$  ( $t \neq 0$ ),  $P$  descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

8. Si dimostri che il perimetro di un poligono regolare di  $n$  lati, inscritto in una circonferenza di raggio  $r$ , quando si fa tendere  $n$  all'infinito, tende alla lunghezza della circonferenza.

9. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = \cos^3 x$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

10. Si dimostri che se le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è uguale alla somma dei quadrati degli altri due.

**QUESTIONARIO - Estero 2010**

1. Sia  $\gamma$  il grafico di  $y = \frac{10x}{x^2 + 1}$ . Si trovi l'equazione della retta normale a  $\gamma$  nel punto  $(2; 4)$ .

2. Si determini il cono rotondo di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 30 cm.

3. Qual'è la derivata di  $f(x) = 3^{3x}$ ? Si giustifichi la risposta.

4. Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.

5. La regione  $R$  del primo quadrante delimitata dal grafico di  $y = 3e^{-x}$  e dalla retta  $x = \ln 3$  è la base di un solido  $S$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $S$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $S$ .

6. Un prisma a base quadrata ha altezza  $x$  e spigolo di base  $y$  tali che  $x + y = 3$ . Quale è il suo volume massimo?

7. Si disegni, nell'intervallo  $]-\pi; \pi[$ , il grafico della funzione  $f(x) = \frac{1}{2}|\cos x| - 1$

8. Si consideri una parabola del fascio  $y = x^2 - ax$  e siano  $r$  e  $s$  le rette ad essa tangenti rispettivamente nell'origine del sistema di riferimento  $Oxy$  e nel punto  $T$  di ascissa  $2a$ . Sia  $P$  il punto di intersezione fra  $r$  e  $s$ . Si calcoli:  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{OP}{PT}$ .

**QUESTIONARIO - Comunicazione 2010**

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

3. Vedi quesito n. 3 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*

4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*

5. Vedi quesito n. 5 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*

6. Vedi quesito n. 6 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*

7. Vedi quesito n. 7 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*

8. Vedi quesito n. 8 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

9. Vedi quesito n. 9 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

10. Vedi quesito n. 7 *Questionario - P. N. I. 2010 - sessione straordinaria*

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria**

1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la geometria euclidea non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di geometria non euclidea. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

2. Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate  $(4; 0)$ .

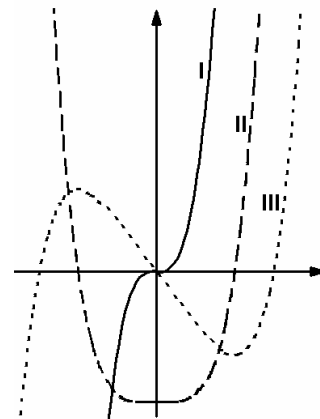
3. Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0; \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .

4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .

5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme  $N$  dei numeri naturali ( "i numeri tutti"). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio  $10\text{ cm}$ , qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
10. Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione  $f$ , un altro lo è della funzione derivata  $f'$  e l'altro ancora di  $f''$ .  
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	$F$	$f'$	$f''$
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.



**QUESTIONARIO - Ordinamento 2011 - sessione ordinaria**

1. Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio  $60\text{ cm}$ . Quale è la capacità in litri del serbatoio?
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
3. Sia  $R$  la regione delimitata dalla curva  $y = x^3$ , dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 2$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
5. Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva  $y = \cos x$  e dall'asse  $x$  da  $x = 1$  a  $x = 2$  radianti.
6. Si calcoli  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan x - \tan \alpha}{x - \alpha}$
7. Si provi che l'equazione:  $x^{2011} + 2011^x + 12 = 0$  ha una sola radice compresa fra  $-1$  e  $0$ .
8. Vedi quesito n. 8 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
9. Vedi quesito n. 9 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
10. Vedi quesito n. 10 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*

**QUESTIONARIO - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva**

1. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di  $260\text{ metri}$ . Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli?
2. La funzione:
 
$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2},$$
 non è definita nel punto  $x = 0$ , che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della  $f(x)$  per  $x$  tendente a zero da sinistra e per  $x$  tendente a zero da destra.
3. La retta di equazione  $x = 8$  seca la parabola di equazione  $x = y^2 - 4y + 3$  nei punti  $A$  e  $B$ . Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base  $AB$  si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di  $180^\circ$  intorno all'asse della parabola.
4. Si determini il campo di esistenza della funzione:
 
$$f(x) = (3\cos x + \sin^2 x - 3)^{\cos x}.$$

- Che cosa succederebbe se l'esponente fosse  $\sin x$ ?
5. Si calcoli il valore medio della funzione  $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$ , nell'intervallo  $0 \leq x \leq 1$ .
  6. Si determini un numero positivo  $N$  tale che, per  $x > N$ , la funzione  $f(x) = 2^{0,3x}$  è sempre maggiore della funzione  $g(x) = x^{30}$ .
  7. Tenuto conto che:  $\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx$   
si calcoli un'approssimazione di  $\pi/2$ , utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.
  8. La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e dagli assi cartesiani è la base di un solido  $F$  le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse  $y$ , sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $F$ .
  9. Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità 0,5 di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?
  10. Sia  $P$  un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso  $A$  e  $B$ , l'angolo  $A\hat{P}B$  sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

### **QUESTIONARIO - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva**

1. Vedi quesito n. 1 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva*
3. Vedi quesito n. 3 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva*
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione suppletiva*
6. Si dica se l'equazione:  
$$2 \sin x + 2 \cos x = 3 + 2^x$$
ha soluzione.
7. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.
8. Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera  $f(x)$  è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata  $f'(x)$  è simmetrico rispetto all'origine".
9. Si calcoli il limite della funzione  $\frac{e^{x^3} - 1}{x \sin^2 x}$  quando  $x$  tende a 0.
10. Data una circonferenza di centro  $O$ , si conducano negli estremi  $A$  e  $B$  di un suo diametro  $AB$  le tangenti e siano  $C$  e  $D$  i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza.  
Si dimostri che l'angolo  $C\hat{O}D$  è retto.

### **QUESTIONARIO - Comunicazione 2011 - sessione ordinaria**

1. Vedi quesito n. 5 *Questionario - Ordinamento 2011 - sessione ordinaria*
2. Vedi quesito n. 2 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
3. Vedi quesito n. 6 *Questionario - Ordinamento 2011 - sessione ordinaria*
4. Vedi quesito n. 4 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
5. Vedi quesito n. 5 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
6. Vedi quesito n. 6 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
7. Vedi quesito n. 7 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
8. Vedi quesito n. 8 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
9. Vedi quesito n. 9 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*
10. Vedi quesito n. 10 *Questionario - P. N. I. 2011 - sessione ordinaria*

### **QUESTIONARIO - Europa 2011 - sessione ordinaria**

1. Si provi che se i lati di un triangolo rettangolo sono in progressione aritmetica di ragione  $d$  allora il raggio della circonferenza inscritta è uguale a  $d$ .

2. Sia  $W$  il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse  $y$  la parte di piano compresa, per  $x \in [0 ; \pi/2]$ , fra il grafico di  $y = \sin x$  e l'asse  $x$ . Quale dei seguenti integrali definiti fornisce il volume di  $W$ ?
- A)  $2\pi \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$       B)  $\pi \int_0^{\pi/2} (\arcsin x)^2 dx$       C)  $\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$       D) nessuno di questi
- Si motivi la risposta.
3. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, a base quadrata, di superficie totale  $a^2$  quale è quello di volume massimo?
4. La curva di equazione  $y = \sqrt{x \ln x}$  ammette punti con tangente parallela all'asse  $x$ ? Ammette punti con tangente parallela all'asse  $y$ ? In caso affermativo si determinino.
5. In una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  sono date due corde prive di punti comuni  $AB = r$  e  $CD = r\sqrt{3}$ . Si dimostri che il quadrilatero  $ABCD$  ha le diagonali perpendicolari.
6. Vedi quesito n. 7 *Questionario - Ordinamento 2010 - sessione straordinaria*
7. Si calcoli il valor medio della funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  nell'intervallo  $[-1 ; 1]$  e se ne indichi il significato geometrico.
8. La regione  $R$  è delimitata da  $y = 2x$  e  $y = x^2$  come mostrato nella figura a lato.  $R$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni, ottenute tagliando  $W$  con piani perpendicolari all'asse  $x$ , hanno area  $A(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ . Si determini il volume di  $W$ .

**QUESTIONARIO - Americhe 2011 - sessione ordinaria**

1. Vedi quesito n. 2 *Questionario - Europa 2011 - sessione ordinaria*
2. *Angelo* siede in un punto  $A$  della piazza del suo paese e vi osserva un albero in  $B$ , una fontana in  $F$  e un lampione in  $L$ . Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente  $B$  e  $F$  pari a  $30^\circ$  e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede  $FL$  pari a  $45^\circ$ . Sapendo che  $BF = 12 \text{ m}$  e  $FL = 20 \text{ m}$  e che  $\widehat{BFL} = 155^\circ$ , si spieghi ad *Angelo* come procedere per calcolare  $AB$ ,  $AF$  e  $AL$ . Sono attendibili i risultati  $AB = AF \approx 23,18 \text{ m}$  e  $AL \approx 27,85 \text{ m}$ ?
3. La base di un solido  $S$  è la regione triangolare compresa tra gli assi coordinati e la retta di equazione  $4x + 5y = 20$ . Si calcoli il volume di  $S$  sapendo che le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono semicerchi.
4. Si spieghi perché l'equazione  $\cos x = x$  ha almeno una soluzione.
5. Si risolva l'equazione  $|x - 1| = 1 - |x|$
6. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?
7. Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.
8. Sia  $t \in [0 ; 2\pi]$ ; quale è la curva rappresentata dalle equazioni  $x = a \cos t$  e  $y = b \sin t$ ?