1. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2001 – sessione ordinaria

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane monometriche *(Oxy)*:

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\dfrac{PA}{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di *Apollonio*) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;
b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di $45°$;
c) posto X appartenente a γ in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \left(\dfrac{XB}{XA}\right)^2$ e $x = tg(\alpha)$.

---

2. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2001 – sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:
$y = x^2 + a\ ln(x + b)$, con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$.
b) Si studi e si disegni Γ.
c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x.
d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$.
e) Si disegni, per i valori di a e b trovati il grafico di $y = |x^2 + a\ ln(x + b)|$.

---

3. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2001 - sessione ordinaria

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x , y: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}$ dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *(Oxy)*.
b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1 ; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.
e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto *a)*, risulta tangente alla circonferenza k.

---

4. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2001 - sessione ordinaria

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che: $BD = DE = EC$.
Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\dfrac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo ABC sia acuto e si abbia inoltre: $AB = 13a$, $BC = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto *b)*, ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.
d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

---

5. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2001 - sessione suppletiva

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo;
b) si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;
c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in *b)*, si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, ad ABC;
d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

---

6. PROBLEMA 2 – P. N. I. 2001 - sessione suppletiva

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto. Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla. Successivamente, posto il volume della lattina pari a *2* decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

b) nel caso di cui al punto *a)*;
c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia sezione aurea dell'altezza.

---

7. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2001 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione reale fm di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A

---

8. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2001 - sessione suppletiva

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma con il piano della base ABC un angolo φ tale che $sen\varphi = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.
b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.
c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

---

9. PROBLEMA 1 – Sperimentazioni autonome 2001 – sessione suppletiva

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x , y), si consideri il luogo geometrico γ dei punti P che vedono il segmento di estremi $A(0 ; 1)$ e $B(2 ; 1)$ sotto un angolo $A\hat{P}B$ di ampiezza $\pi/4$ e se ne disegni il grafico.
Nel semipiano delle ordinate $y > 1$ si tracci la retta $y = k$, se ne indichino con C e D le eventuali intersezioni con γ e con C' e D' le loro proiezioni ortogonali su AB. Si determinino i valori di k che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

a) il lato obliquo del trapezio isoscele $ABDC$;
b) la diagonale del rettangolo $CDD'C'$;
c) il cilindro generato dalla rotazione di $CDD'C'$ attorno all'asse del segmento AB.

---

10. PROBLEMA 2 – Sperimentazioni autonome 2001 – sessione suppletiva

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche $(x ; y)$, si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3+a}{(x+b)^2}$$

- si determinino a e b in modo che il grafico della curva γ che ne risulta passi per il punto $P(2 ; 0)$ e abbia per asintoto la retta $x = -1$;
- si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo t;
- si determini l'angolo α che t forma con la tangente a γ nel punto di intersezione tra γ e t;
- si tracci il grafico di: $y = \frac{|x^3+a|}{(x+b)^2}$.

---

11. PROBLEMA 1 – Scuole italiane all'estero 2001 – sessione ordinaria

È assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura a.

a) Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complanari);
b) Si determini il valore di a per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è 31,4 dm^3;
c) Si determini il volume della sfera S circoscritta a C.

---

12. PROBLEMA 2 - Estero 2001 - sessione ordinaria

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento ortogonale monometrico è data la curva G di equazione:

$y = 2x - \frac{x^3}{2}$

a) Si studi e si rappresenti *G*;
b) considerata la retta *r* di coefficiente angolare *m* passante per il punto *A(2 ; 0)*, si determini, al variare di *m*, il numero delle intersezioni di *r* con *G*;
c) si calcoli l'area della regione finita di piano *R*, del primo quadrante, delimitata da *G* e dall'asse *x*;
d) si determini il volume del solido generato da *R* in un giro completo intorno all'asse *x*.

---

13. PROBLEMA 1 - Estero 2001 - sessione ordinaria.

In un piano, riferito ad un sistema di assi ortogonali (*Oxy*), è assegnata la parabola *p* di equazione: $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$

a) Determinare le equazioni della retta *t* tangente alla parabola nel suo punto C(*0 ; 1*) e la retta *s* perpendicolare alla retta *t* e tangente alla parabola medesima.
b) Dopo aver controllato che la retta *s* e la parabola *p* si toccano nel punto *A*(*2 ; 1*), trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto *A* e tangenti alla retta *t*.
c) Indicata con *k* la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con *p*, oltre ad *A*, e detto *B* il punto in cui questa circonferenza tocca la retta *t*, calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento *BC*, dal minore degli archi *AB* della circonferenza *k* e dall'arco *AC* della parabola *p*.
d) Chiamata *r* la retta tangente alla circonferenza *k* e strettamente parallela alla retta *t* e considerato il segmento parabolico che tale retta *r* individua sulla parabola *p*, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse *x*.

---

14. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2002 - sessione ordinaria

Due numeri *x* e *y* hanno somma e quoziente uguali a un numero reale *a* non nullo. Riferito il piano ad un sistema *S* di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (*x ; y*):
a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di *a*;
b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo *γ* dei punti *P(x ; y)* che soddisfano al problema;
c) si rappresentino in *S* sia la curva *γ* che la curva *γ'* simmetrica di *γ* rispetto alla bisettrice del *I* e del *III* quadrante;
d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da *γ* e da *γ'* e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
e) si calcoli *y* nel caso che *x* sia uguale a *1* e si colga la particolarità del risultato.

---

15. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2002 - sessione ordinaria

I raggi *OA = OB = 1* metro tagliano il cerchio di centro *O* in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.
Si chiede di determinare:
a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono *C* di volume massimo, il valore *V* di tale volume massimo e il valore *V'* assunto in questo caso dal volume del secondo cono *C'*;
b) la capacità complessiva, espressa in litri, di *C* e di *C'*;
c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono *C*, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

---

16. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2002 - sessione ordinaria

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *(Oxy)*, è assegnata la curva *k* di equazione *y = f(x)*, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di *x* essa è situata nel semipiano *y > 0* e per quali nel semipiano *y < 0*.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine *O* degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse *y*, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva *k* nel punto di ascissa *−1* (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
c) Stabilire se la retta tangente alla curva *k* nel punto di ascissa *−1* ha in comune con *k* altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva *k* ha per tangente una retta parallela all'asse *x*.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione *f(x)* assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \le x \le 0$.

---

17. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2002 - sessione ordinaria

Si considerino le lunghezze seguenti:
[1] *a + 2x*, *a − x*, *2a − x*,
dove *a* è una lunghezza nota non nulla ed *x* è una lunghezza incognita.
a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$, le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto *c)*, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a : calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

---

18. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2002 - sessione suppletiva

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche *(Oxy)* è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b\ ln\, x}{x}$$

ove $ln\, x$ denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico G della funzione passa per i punti $(e^{-1}\ ;\ 0)$ e $(e^{2}\ ;\ 3e^{-2})$;

b) si studi e si disegni G;

c) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;

d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \le x \le 2$, da G e da G';

e) si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b\ ln|x|}{|x|},\quad y = \left|\frac{a + b\ ln\, x}{x}\right|.$$

---

19. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2002 - sessione suppletiva

È data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;

b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;

c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto $r = 1$ metro;

d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;

e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

---

20. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2002 - sessione suppletiva

Se il polinomio $f(x)$ si divide per $(x^2 - 1)$ si ottiene x come quoziente e x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *(Oxy)*, dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1},$$

calcolare una primitiva della funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

---

21. PROBLEMA 2 – Ordinamento2002 - sessione suppletiva

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:

– il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;

– lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;

– la faccia VBC della piramide forma un angolo di $45°$ con il piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base $ABCD$ della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

---

22. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2002 - sessione straordinaria

Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z: $\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases}$ [1]

a) stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:
determinato;
indeterminato;
impossibile.

b) Posto che la terna *(x ; y ; z)* sia una soluzione del sistema [1], studiare la curva di equazione:
$$y - \frac{b}{b(a-b)} = \frac{x}{a} + z$$
e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (*Oab*).

---

23. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2002 - sessione straordinaria

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali *(Oxy)*:

a) studiare le funzioni:
$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \quad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$
e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto *O*, tali grafici hanno in comune un altro punto *A*, determinare sul segmento *OA* un punto *P* tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse *y*, sia massima la lunghezza del segmento *RS*, dove *R* ed *S* sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto *A*, si ritrovano i punti *R* ed *S*;

d) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse *x*.

---

24. PROBLEMA 1 – Ordinamento 2002 - sessione straordinaria

Con riferimento a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali *(Oxy):*

a) scrivere l'equazione della circonferenza *k* con centro nel punto *(8 ; 2)* e raggio *6* e calcolare le coordinate dei punti *M* ed *N* in cui la bisettrice *b* del *1°* e *3°* quadrante interseca la curva;

b) scrivere l'equazione della parabola *p* avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti *M* ed *N*;

c) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola *p* e dalla bisettrice *b*;

d) dopo aver stabilito che la circonferenza *k* e la parabola *p* non hanno altri punti in comune oltre ad *M* ed *N*, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da *k* è diviso dalla parabola.

---

25. PROBLEMA 1 – Sperimentazioni autonome 2002 - sessione ordinaria

È dato il triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, tale che *AC* e *BC* sono lunghi rispettivamente $a\sqrt{3}$ e *3a*, essendo *a* una lunghezza assegnata. Indicato con *H* il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano *P* un generico punto dell'ipotenusa *AB* e *z* la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

a) Determinare in funzione di *z* la somma delle distanze di *P* dai vertici del triangolo.

b) Determinare la posizione di *P* per cui è minima tale somma.

c) Indicata con *D* la posizione di *P* per cui *PBC* è isoscele , calcolare la lunghezza di *DC*.

d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (*Oxy*), trovare l'equazione della circonferenza *k* avente centro in *D* e passante per *C*, e stabilire come sono posizionati i punti *A* e *B* rispetto a *k*.

e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui le retta *BC* divide il cerchio delimitato da *k*.

f) Calcolare, infine, il volume del solido generato dalla minore delle due regioni suddette quando ruota di un giro completo attorno alla retta *DB*.

---

26. PROBLEMA 2 – Sperimentazioni autonome 2002 - sessione ordinaria

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *(Oxy)*, sono assegnate le curve di equazione:
$$y = kx^3 - (2 - k)x^2 - (3 - 2k)x + 2,$$
dove *k* è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che le curve assegnate hanno uno ed un solo punto in comune.

b) Indicata con γ quella, fra tali curve, che si ottiene per $k = 1$, dimostrare che γ ha un centro di simmetria.

c) Dimostrare che la curva γ interseca l'asse *x* in uno ed un solo punto *A* di ascissa x_A.

d) Determinare *z* tale che $\frac{z}{10} < x_A < \frac{z+1}{10}$.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione $x = 1$.

27. *PROBLEMA 1 – America Latina 2002 - sessione suppletiva*

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la parabola *p* di equazione:

$$y = x^2 + x + 1$$

a) Condotte per il punto *O* le rette tangenti alla parabola, trovare le coordinate dei punti *A* e *B* di contatto.
b) Trovare le coordinate del punto *C*, situato da parte opposta di *O* rispetto alla retta *AB*, tale che il triangolo *ABC* sia isoscele e rettangolo in *C*.
c) Determinare l'equazione della circonferenza *k* avente il centro in *C* e passante per *A*.
d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco *AB* di parabola e dai segmenti *CA* e *CB*.
e) Determinare in quante parti la parabola *p* divide il cerchio delimitato da *k*.

28. *PROBLEMA 2 – America Latina 2002 - sessione suppletiva*

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = -x^3 + mx^2 - m + 3,$$

dove *m* è un parametro reale.
a) Dimostrare che le curve hanno due punti in comune.
b) Determinare, tra le curve assegnate, la curva γ avente un flesso nel punto di ascissa *1*.
c) Per il punto *A*, di ascissa $\frac{1}{2}$ condurre le due rette tangenti a γ e indicare con *B* e *C* ($x_B > x_C$) i punti che tali rette tangenti hanno in comune con γ , oltre al punto *A*.
d) Sull'arco *AB* di γ trovare un punto *P* in modo che l'area del triangolo *APB* sia massima.
e) Calcolare la tangente dell'angolo formato dalle due suddette rette tangenti a γ.

29. *PROBLEMA 1 - P. N. I. 2003 - sessione ordinaria*

Nel piano sono dati: il cerchio *γ* di diametro $OA = a$, la retta *t* tangente a *γ* in *A*, una retta *r* passante per *O*, il punto *B*, ulteriore intersezione di *r* con *γ*, il punto *C* intersezione di *r* con *t*.
La parallela per *B* a *t* e la perpendicolare per *C* a *t* s'intersecano in *P*. Al variare di *r*, *P* descrive il luogo geometrico *Γ* noto con il nome di *versiera di Agnesi* [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proposizioni:
   $OD : DB = OA : DP$
   $OC : DP = DP : BC$
   ove *D* è la proiezione ortogonale di *B* su *OA*.
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche *Oxy*, l'equazione cartesiana di *Γ* è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$.
3. Si tracci il grafico di *Γ* e si provi che l'area compresa fra *Γ* e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio *γ*.

30. *PROBLEMA 2 - P. N. I. 2003 - sessione ordinaria*

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con *a, b, c* numeri reali. Si determinino *a, b, c* in modo che:
1. la funzione *f* sia pari;
2. $f(0) = 2$;
3. $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{2\ln 2}$.

Si studi la funzione *g* ottenuta sostituendo ad *a, b, c* i valori così determinati e se ne disegni il grafico *G*. Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca *G*, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra *r* e *G*.
Si calcoli $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$.
Si determini la funzione *g'* il cui grafico è simmetrico di *G* rispetto alla retta *r*.

31. *PROBLEMA 1 - Ordinamento 2003 - sessione ordinaria*

Si consideri un tetraedro regolare *T* di vertici *A*, *B*, *C*, *D*.
a) Indicati rispettivamente con *V* ed *S* il volume e l'area totale di *T* e con *r* il raggio della sfera inscritta in *T*, trovare una relazione che leghi *V*, *S* ed *r*.
b) Considerato il tetraedro regolare *T'* avente per vertici i centri delle facce di *T*, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di *T* e *T'* e il rapporto fra i volumi di *T* e *T'*.
c) Condotto il piano *α*, contenente la retta *AB* e perpendicolare alla retta *CD* nel punto *E*, e posto che uno spigolo di *T* sia lungo *s*, calcolare la distanza di *E* dalla retta *AB*.
d) Considerata nel piano *α* la parabola *p* avente l'asse perpendicolare alla retta *AB* e passante per i punti *A*, *B* ed *E*, riferire questo

piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

---

32. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2003 - sessione ordinaria

È assegnata la funzione $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.
c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

---

33. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2003 - sessione suppletiva

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a - 1)x^2 - 2ax + a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.
b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.
c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y=\frac{3}{2}$.

---

34. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2003 - sessione suppletiva

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto a un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.
b) Riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.
c) Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.
d) Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.
e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

---

35. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2003 - sessione suppletiva

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$AB = 3\ cm$; $AC = 2\ cm$; $C\hat{A}B = 60°$.

Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.
b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.
c) Si trovi sul lato AD, internamente a esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.
d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

---

36. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2003 - sessione suppletiva

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b ($a > b$) e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.
b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}\ dm^2$.
c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

---

37. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2003 - sessione straordinaria

È assegnata la seguente equazione in x:

$x^3 + 2x - 50 = 0$, con $x \in R$.

a) Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\bar{x}$.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \bar{x} < z + 1$.
c) Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di $\bar{x}$ a meno di 10^{-4}.
d) Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:
$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$
ammette un massimo e un minimo relativi.
e) Stabilire se esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui la curva $C_{\bar{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

---

38. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2003 - sessione straordinaria

Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.

a) Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.
b) Calcolare la probabilità che:
   1) nessun uomo balli con la propria moglie;
   2) un solo uomo balli con la propria moglie;
   3) tutti e tre gli uomini ballino con le rispettive mogli.
c) Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:
   1) per $n = 24$, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;
   2) per $n = 4$, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;
   3) per $n = 60$, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;
   4) per $n = 15$, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k p^{n-k} \;,\; y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (e = 2{,}7182\ldots \,,\, \pi = 3{,}1415\ldots).$$

---

39. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2003 - sessione straordinaria

È assegnata la seguente equazione in x:

$x^3 + 2x - 50 = 0.$

a) Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\bar{x}$ nel campo reale.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \bar{x} < z + 1$.
c) Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:
$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$
ammette un massimo e un minimo relativi.
d) Stabilire se esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui la curva $C_{\bar{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.
e) Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

---

40. PROBLEMA 2 - Ordinamento2003 - sessione straordinaria

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

$6\ cm,\ 10\ cm,\ 4\left(4 + \sqrt{5}\right)\ cm.$

a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza.
b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.
c) Dopo aver riferito il piano del trapezio a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.
d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.
e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.
f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

---

41. PROBLEMA 1 - Estero 2003 - sessione ordinaria

Considerate le funzioni

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

1. Tracciate nel piano $(t\,;\,y)$ i loro rispettivi grafici F e G.

2. Provate che un punto qualsiasi dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ avente per ascissa $f(t_1)$ ha per ordinata $g(t_1)$.
3. Siano P e Q i punti rispettivamente di F e G aventi la medesima ascissa k . Stabilite se la distanza tra P e Q assume un valore di minimo o di massimo assoluto per qualche particolare valore di k.
4. Calcolate l'area della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = -1$ e quella della regione limitata da F, G, dall'asse y e dalla retta di equazione $t = 1$.

---

42. PROBLEMA 2 - Estero 2003 - sessione ordinaria

Determinare b e c affinché la parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$ abbia il vertice in $A(1\ ;\ 6)$.
Determinare altresì il parametro k in modo che l'iperbole di equazione $xy = k$ passi per A.

1. Disegnare le due curve e determinare le coordinate dei loro ulteriori punti comuni indicando con B quello appartenente al primo quadrante.
2. Calcolare l'area della parte di piano limitata dai due archi AB della parabola e dell'iperbole.
3. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse y della medesima parte di piano.

---

43. PROBLEMA 1 – America Latina 2003 – sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche $(x\ ;\ y)$, studiate la curva G di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$$

1. Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.
2. Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva G. Sul segmento AB prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di G avente la stessa ascissa di P, sia massima l'area del triangolo APQ.
3. Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da G e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.
4. Determinate l'equazione della curva S simmetrica di G rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante.

---

44. PROBLEMA 2 – America Latina 2003 – sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $(x\ ;\ y)$, siano:
S il punto di coordinate $(0\ ;\ 4)$; P un punto della retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y.

a. Trovate l'equazione cartesiana del luogo G descritto da Q al variare di P su r.
b. Studiate G , disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x = 3$.
c. Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra G , il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x = 2$.
d. Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di G rispetto alla retta $x = 2$.

---

45. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2004 - sessione ordinaria

Sia γ la curva d'equazione $y = ke^{-\lambda x^2}$ ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* [da *Karl Friedrich Gauss* (1777-1855)]. Una media $\mu \neq 0$ e uno scarto quadratico medio $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

---

46. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2004 - sessione ordinaria

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = sen\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che
$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$
2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2$ e $b = 1$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

---

47. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2004 - sessione ordinaria

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f.

2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

---

48. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2004 - sessione ordinaria

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC=\sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di K.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

---

49. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2004 - sessione suppletiva

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

(1) $$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è *16*.
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

---

50. PROBLEMA 2 – P. N. I. 2004 - sessione suppletiva

Nel Liceo Scientifico «Torricelli» vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione / sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	20

a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5a A, questa sia formata da alunni di sesso:

   1) maschile 2) femminile 3) differente.

   Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?.
d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5a D.

---

51. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2004 - sessione suppletiva

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo *7 cm*. Anche l'altezza VH della piramide è lunga *7 cm* e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.
b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?
c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

---

52. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2004 - sessione straordinaria

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A;
b) chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p;
c) indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}\left(3-\sqrt{3}\right)$;
d stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

---

53. PROBLEMA 2 – P.N.I. 2004 - sessione straordinaria

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n=\sum_{i,k=1}^{n} ik\,,\quad b_n=\sum_{j=1}^{n} j^2\,,\quad c_n=\sum_{\substack{i,k=1\\(k\ge i)}}^{n} ik$$

a) Dimostrare che risulta:

$$a_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\ ,\ b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\ ,\ c_n=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)\cdot$$

b) Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera *100 000*.
c) Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.
d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi *20* numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di *5* righe e *4* colonne.

---

54. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2004 - sessione straordinaria

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y=\frac{1+a\ sen\,x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$
c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \le x \le \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

---

55. PROBLEMA 1 – Estero 2004 – sessione ordinaria

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 cm, si determini:

1. il cono C di volume massimo e il valore, espresso in litri, di tale volume massimo.
2. il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;
3. il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.

---

56. PROBLEMA 2 – Estero 2004 – sessione ordinaria

Sia f la funzione definita da: $f(x)=\dfrac{x+a}{bx^2+cx+2}$ (1)

1) Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:
   a) i valori di a, b e c sono *0* o *1*;
   b) il grafico G di f passa per $(-1\,;0)$;
   c) la retta $y = 1$ è un asintoto di f.
2) Si disegni G.
3) Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette $x = 0$, $x = 2$.

---

57. PROBLEMA 1 – P.N.I. 2005 - sessione ordinaria

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r di equazioni:

$\lambda : x^2 = 4(x-y)$ e $r : 4y = x + 6$.

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

---

58. PROBLEMA 2 – P. N. I. 2005 - sessione ordinaria

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo [0 ; +∞[da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2}(3 - 2\ln x) + 1 \quad se\ x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo [0 ; +∞[, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = 1$ e $x = \dfrac{1}{n}$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

---

59. PROBLEMA 1 – Ordinamento 2005 - sessione ordinaria

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

---

60. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2005 - sessione suppletiva

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo $4\ cm$:

1) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2) supposto che gli spigoli AB e MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC e MNP a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4) dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;
5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

---

61. PROBLEMA 2 – P. N. I. 2005 - sessione suppletiva

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

5) Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

---

62. PROBLEMA 1 – Ordinamento 2005 - sessione suppletiva

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base *ABC* della piramide sia lungo *4 cm*:

1) calcolare la misura dello spigolo della base *MNP* del prisma, complanare ad *ABC*;
2) supposto che gli spigoli *AB* e *MN* siano paralleli, riferire il piano dei triangoli *ABC* e *MNP* a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in *A* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AB* e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta *AB* e passante per i punti *A*, *B*, *M* e verificare che passa pure per *N*;
4) calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC e MNP;
5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo *MNP* rispetto al triangolo *ABC*.

---

63. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2005 - sessione suppletiva

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia a nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5) Dopo aver controllato che il valore $\bar{a}$ sopraddetto è *4*, indicare con $\bar{\gamma}$ e $\bar{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\bar{G}$ divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$.

---

64. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2005 - sessione straordinaria

Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e si costruisca, dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*, il punto *E* in modo che il triangolo *ECD* sia simile ad *ABC*.

a) Dimostrare che:
   1) *EC* è perpendicolare a *CB*;
   2) i triangoli *EFC* e *AFD* – dove *F* è il punto comune ai segmenti *ED* e *AC* – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli *EFA* e *CFD* sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
   3) *EA* è parallela a *CB*;
   4) il quadrilatero *AECD* è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di *BC* e *CD*, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
   1) il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$;
   2) le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo *ABC* nel triangolo *EDC*.

---

65. PROBLEMA 2 – P. N. I. 2005 – sessione straordinaria

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.
b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2 ; 2).
d) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.
e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

---

66. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2005 - sessione straordinaria

Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:
1) EC è perpendicolare a CB;
2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.

---

67. PROBLEMA 2 – Ordinamento 2005 - sessione straordinaria

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.
b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2\ ;\ 2)$.
d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.
e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

---

68. PROBLEMA 1 – Estero 2005

La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ dove k è una costante arbitraria.
1. Si trovino, in funzione di k, i valori di minimo e massimo relativo di f.
2. Per quali valori di k, f ha tre zeri reali distinti?
3. Si trovi il valore di k tale che il valor medio di f nell'intervallo chiuso $[-1\ ;\ 2]$ sia 1.
4. Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando $k = 32$.

---

69. PROBLEMA 2 – Estero 2005

Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$.
1. Quale è la distanza minima tra λ e r ? E quale ne è il valore?
2. Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima.
3. Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP.
4. Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x .

---

70. PROBLEMA 1 - Australe 2005 - sessione ordinaria

Sia $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$ e sia $F(x)$ la sua primitiva tale che $F(1) = f(1)$. Siano inoltre φ e Φ le curve rappresentative rispettivamente di f e F.
1. Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino φ e Φ;
2. si determinino le coordinate dei punti comuni a φ e Φ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti;
3. si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x + 2 = 0$.

---

71. PROBLEMA 2 - Australe 2005 - sessione ordinaria

Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza k mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD.
1. Si esprima l'area del quadrilatero $ADBC$ in funzione dell'angolo ACB;
2. si determini il valore di ACB cui corrisponde il quadrilatero di area massima;
3. di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

---

72. PROBLEMA 1 - Australe 2005 - sessione suppletiva

Si consideri l'equazione $y = x^3 - ax + b$.
1. Si determinino a e b in modo che la sua curva rappresentativa Γ sia tangente, nel punto A di ascissa -1, alla retta r d'equazione $y = 4$. Si disegni Γ.

2. La retta r incontra Γ in un altro punto B. Si calcoli l'area della regione di piano delimitata dal segmento AB e da Γ.
3. Si determini l'equazione della retta s per l'origine degli assi che delimita con Γ e con l'asse y una regione finita di piano, nel secondo quadrante, di area 5/4.

---

73. PROBLEMA 2 - Australe 2005 - sessione suppletiva

Sia f la funzione definita da $f(x) = sin(x) + a\ cos(x) + b$, con $x \in [-\pi , \pi]$

1. Calcolate a e b in modo che $x = \frac{\pi}{6}$ sia punto di massimo relativo e $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$;
2. Tracciate il grafico λ della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto;
3. Calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x = \frac{\pi}{2}$. .

---

74. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2006 - sessione ordinaria

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del *10%* ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

---

75. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2006 - sessione ordinaria

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = log\ x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $log\ x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette di equazioni y = –1 e y = –2. 2. Si calcoli, posto a = 1, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette x = 1 e x =2.
3. Si studi la funzione $h(x) = log\ x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

---

76. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2006 - sessione ordinaria

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = log\ x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $log\ x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = log\ x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

---

77. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2006 - sessione suppletiva

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$y = x^2,\ x = y^2 - 2y.$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'\ V''$ della parabola p'', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Le due parabole p' e p'' sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.
e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

---

78. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2006 - sessione suppletiva

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno e un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x + 27y - 9 = 0$.
c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ.
d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall'asse x.

---

79. PROBLEMA 1 - ordinamento 2006 - sessione suppletiva

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$y = x^2,\ x = y^2 - 2y.$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'\,V''$ della parabola p'', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y e area massima.
e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

---

80. PROBLEMA 2 - ordinamento 2006 - sessione suppletiva

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno e un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x + 27y - 9 = 0$.
c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ.
d) Determinare l'equazione della circonferenza $\boldsymbol{c}$, tangente alla curva γ nel punto A e avente il centro sull'asse y.
e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da $\boldsymbol{c}$.

---

81. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2006 - sessione straordinaria

È dato il triangolo ABC in cui:

$$AB = \frac{25}{2},\ AC = 5\sqrt{5},\ tg\,\widehat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.
Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;
b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;
c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;
d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;
e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k e alla parabola p.

---

82. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2006 - sessione straordinaria

Si considerino i polinomi di $5°$ grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O e hanno un massimo relativo nel punto:

$$\left(-2\ ;\ \frac{64}{15}\right).$$

a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.
b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.
c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.
d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)dx$$

e) Dopo aver controllato che $\boldsymbol{\gamma}$ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca $\boldsymbol{\gamma}$.

---

83. PROBLEMA 1 – estero 2006 - sessione ordinaria

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = ax^2 + \frac{b}{x},$$

dove a, b sono parametri reali.

a) Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate $(2\ ;\ 3)$ e $(-2\ ;\ 5)$ e indicarla con γ.
b) Studiare la curva γ e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.
c) Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dalla retta $y = 5$.
d) Utilizzando il disegno di γ, trovare quante soluzioni ammette l'equazione $x^3 - kx - 2 = 0$, per $-2 < x < 2$, essendo k un parametro reale.

---

84. PROBLEMA 2 – estero 2006 - sessione ordinaria

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la parabola p' di equazione:

$$y = ax^2 \ ,$$

dove a è un numero reale positivo assegnato.

a) Condotta una generica retta t per il fuoco F della parabola p' e chiamato M il punto medio del segmento che p' intercetta su t, trovare le funzioni $x(k)$ ed $y(k)$ che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di M per mezzo della pendenza della retta t.
b) Considerate le equazioni $x(k)$ e $y(k)$ ed eliminato il parametro fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola p'' (*è chiamata luogo geometrico del punto M al variare di t nel fascio di centro F*).
c) Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p'' e dalle rette di equazioni $x = 0$ ed $x = 2a$.
d) Trovare il valore di a per il quale l'area A è uguale a $\frac{13}{24}$ e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.

---

85. PROBLEMA 1 – estero 2006 - sessione suppletiva

Il triangolo ABC, rettangolo in C, ha altezza relativa all'ipotenusa uguale a 1.

1. Posto $x = C\hat{A}B$ e $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ si esprima il perimetro p del triangolo in funzione di t.
2. Si studi la funzione $p(t)$ così ottenuta e se ne disegni il grafico.
3. Se $p = 6$ quale è il valore, approssimato, in gradi sessagesimali, di x?

---

86. PROBLEMA 2 – estero 2006 - sessione suppletiva

Sia $f(x) = x - x^3$ sull'intervallo $[-2\ ;\ 2]$

1. Trovare m e n tali che la retta di equazione $y = mx + n$ sia tangente al grafico di f nel punto $(-1\ ;\ 0)$.
2. una seconda retta s passante per $(-1\ ;\ 0)$ è tangente al grafico di f in un punto $(a\ ;\ b)$. Determinare a e b.
3. Dare una valutazione dell'angolo compreso tra due rette r ed s.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta s.

---

87. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2007 - sessione ordinaria

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in R$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = x^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)}dx$; successivamente, se ne trovi il limite per t $\to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

---

88. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2007 - sessione ordinaria

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo

$A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico $\boldsymbol{\gamma}$ descritto da C.
2. Si rappresenti $\boldsymbol{\gamma}$, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

---

89. PROBLEMA 2 - ordinamento 2007 - sessione ordinaria

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 sen \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

---

90. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2007 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x \left(e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t\right)dt \,.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa $ln\ 2$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = ln\ 3$.
4. Tenuto conto che $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$, si calcoli un valore approssimato di $ln\ 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

---

91. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2007 - sessione suppletiva

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto A($2\ ;\ 0$).

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:
   $PO^2 + 2PA^2 = 8$,
   controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

---

92. PROBLEMA 2 - ordinamento 2007 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione: $f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x$.

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = ln\ 3$.

---

93. PROBLEMA 1 - Australe 2007 - sessione ordinaria

Sia f la funzione definita da: $f(x) = a\ log_{10}(x) + 1$, ove a è un parametro reale.

1. Dopo aver precisato il campo di esistenza di f si stabilisca per quali valori di a la funzione f è crescente.
2. Si disegnino i grafici F e G di f corrispondenti, rispettivamente, ai valori $a = 2$ e $a = -2$ e siano b e c le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x.
3. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo [$b\ ;\ c$] e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.
4. Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di a per cui f e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

---

94. PROBLEMA 2 - Australe 2007 - sessione ordinaria

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{3} & se\ x\geq 1\\ \dfrac{1}{x} & se\ x\leq 1\end{cases}$$

1. Si disegni il grafico di f;
2. si dica se f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio [o teorema di Lagrange – da Giuseppe Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813)] sull'intervallo $[0\ ;\ 2]$ e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo;
3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

---

95. PROBLEMA 1 - Europa 2007 - sessione ordinaria

Si consideri la parabola Γ d'equazione $f(x) = x^2 + 1$

1. Sia $A(a\ ;\ b)$ un punto di Γ. Si dimostri che, qualsiasi sia $a \in Z$, l'ordinata b non è mai un numero divisibile per 3.
2. Sia $C(h\ ;\ k)$ il centro di una circonferenza tangente a Γ nel punto $(1\ ;\ 2)$. Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C.
3. Si tracci il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$. La funzione ha punti di flesso?
4. Sia $F(t)=\int_0^t \dfrac{1}{f(x)}dx$. Si calcoli il limite per t tendente ad infinito di $F(t)$ e si interpreti il risultato geometricamente.

---

96. PROBLEMA 2 - Europa 2007 - sessione ordinaria

Si consideri la funzione f così definita:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & se\ x\leq 1\\ \dfrac{1}{x} & se\ x\geq 1\end{cases}.$$

1. Si disegni il grafico di f;
2. si mostri che f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[0\ ;\ 2]$; si determinino i valori i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico;
3. il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.

---

97. PROBLEMA 1 - Americhe 2007 - sessione ordinaria

Si consideri la funzione f definita da $f(x) = 1 - x^2$, il cui grafico è la parabola Γ

1) Si trovi il luogo geometrico Λ dei centri $(a\ ;\ b)$ delle circonferenze che sono tangenti a Γ nel suo punto di ascissa 1.
2) Si calcoli l'area del dominio piano delimitato da Λ e Γ.
3) Si tracci il grafico della funzione $\dfrac{1}{f}$;
4) si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $\dfrac{1}{f}$ nella striscia $-1 \leq y \leq -2$ e se ne calcoli l'area.

---

98. PROBLEMA 2 - Americhe 2007 - sessione ordinaria

Della parabola γ si sa che passa per i punti $A(0\ ;\ 2)$ e $B(2\ ;\ 0)$, ha l'asse parallelo all'asse y e volge la concavità nel verso negativo di tale asse; inoltre l'area del dominio piano delimitato da γ e dai segmenti OA e OB è $\dfrac{10}{3}$.

1. Si determini l'equazione di γ e se ne tracci il grafico.
2. La retta s di equazione $y = mx + 2$, dove m è un parametro reale, interseca γ in A e in C. Si esprimano in funzione di m le coordinate di C.
3. Si studi la funzione $f(m) = AC^2$ e se ne tracci il grafico λ.
4. Si dica quale posizione assume la retta s in corrispondenza dell'estremo relativo della curva λ.

---

99. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2008 - sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti ($1\ ;\ 2$) e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle sole posizioni di C per cui $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$.
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$, si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

---

100. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2008 - sessione ordinaria

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.
1. Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di h e dall'asse x sull'intervallo $[2\ ;\ 4]$.

---

101. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2008 - sessione ordinaria

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$ (figura 1).

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.
b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

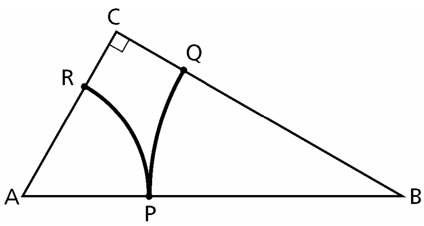


Figura 1.

c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.
d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutte quadrati.

---

102. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2008 - sessione ordinaria

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$ (figura 2), si affrontino le seguenti questioni.
a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.
b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.
c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.
Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

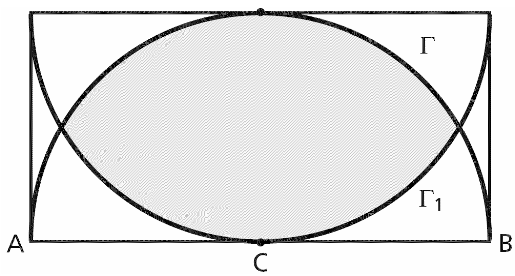


Figura 2.

d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

---

103. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2008 - sessione suppletiva

Siano dati un cerchio di raggio r ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto.
1. Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto: $\frac{PA^2 + PB^2}{AB^2}$ e lo si esprima in funzione di $x = \tan P\hat{A}B$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione $x = k$, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

---

104. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2008 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione: $y = a\sin^2(x) + b\sin(x) + c$
1. Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per $A(0\ ;\ 2)$, per $B(\pi/6\ ;\ 0)$ ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}\,x + 2y - 5 = 0$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta $y = 2$ e la curva stessa.

4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per $P(0\ ;\ 6)$ e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

---

105. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2008 - sessione suppletiva

Dato un quadrante *AOB* di cerchio, di centro *O* e raggio *2*, si consideri sull'arco *AB* un punto *P*.

1. Si esprima in funzione di $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (con $x = B\hat{O}P$) l'area del quadrilatero *OMPN*, essendo *M* ed *N* i punti medi dei raggi OA e OB.
2. Si studi la funzione *f(t)* così ottenuta e si tracci il suo grafico **γ**, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di *x* l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva **γ** e l'asse *x*.

---

106. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2008 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione: $y = sin(x)(2cos(x)+1)$

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma **γ** passa per il punto $P(\pi\ ;\ 0)$.
2. Si rappresenti graficamente la curva **γ** nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti *A* e *B* di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ e si determini il loro punto d'intersezione *C*.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

---

107. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2008 - sessione straordinaria

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), si trattino le seguenti questioni:

1. Si costruisca il grafico **γ** della funzione $f(x) = 2(2-x)\sqrt{x^2-1}$.
2. Si determini il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse *x*, dalla superficie piana , finita, delimitata da **γ** e dall'asse *x*.
3. La retta $x = 2$ seca l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nei punti *A* e *B*. Si inscriva nel segmento iperbolico di base *AB* il rettangolo di area massima. A tal fine, si indichi con *x* l'ascissa dei vertici del generico rettangolo, inscritto nel segmento iperbolico, appartenenti all'iperbole e si utilizzi la curva γ.
4. Si calcoli il volume del solido che ha per base il segmento iperbolico prima considerato e tale che, tagliato con piani paralleli ad *AB*, dia tutte sezioni esagonali regolari.

---

108. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2008 - sessione straordinaria

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & per\ |x| < 1 \\ 0 & per\ |x| \ge 1 \end{cases}$

1. Si dica se questa funzione è continua nei punti in cui |x| = 1.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico **γ**, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*).
3. Si scriva l'equazione della normale a γ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dalla curva **γ** e dall'asse delle *x*.

---

109. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2008 - sessione straordinaria

Sia data la parabola di equazione: $y = ax^2 + bx + c$

1. Si determinino a, b, c, in modo che la parabola passi per i punti $A(0\ ;\ -6)$, $B(0\ ;\ -6)$ e nel punto *B* sia tangente alla retta di coefficiente angolare *5*.
2. Si determinino le misure dei lati del rettangolo di perimetro massimo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse *x*.
3. Trovato questo rettangolo ed essendo *M* ed *N* i due suoi vertici che stanno sulla parabola, si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle tangenti alla parabola in *M* e *N*.
4. Si calcoli il rapporto tra i volumi dei solidi generati in una rotazione attorno all'asse *x* dal segmento parabolico e dal rettangolo di perimetro massimo considerato.

---

110. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2008 - sessione straordinaria

Si consideri la funzione: $f(x) = \ln\frac{x+1}{x^2+2}$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto d'intersezione con l'asse y.
3. Si studi la funzione $g(x) = e^{f(x)}$ e se ne tracci il grafico Γ.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva Γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \sqrt{2}$.

---

111. PROBLEMA 1 - Europa 2008 - sessione ordinaria

La circonferenza γ passa per $B(0\ ;\ -4)$ ed è tangente in $O(0\ ;\ 0)$ alla retta di coefficiente angolare -4; la parabola λ passa per $A(4\ ;\ 0)$ ed è tangente in O a γ.
1. Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.
2. Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.
3. Se P è un punto dell' arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.
4. Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.

---

112. PROBLEMA 2 - Europa 2008 - sessione ordinaria

Nell'insieme delle funzioni $y = f(x)$ tali che

$$y' = \frac{ax}{\left(1+4x^2\right)^2}$$

si trovi quella il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ e $(0\ ;\ 2)$.

1. Constatato che la funzione definita da: $y = \dfrac{2}{1+4x^2}$ è quella richiesta, si disegni γ.
2. Si conduca la tangente a γ in un suo generico punto P. Sia Q l'intersezione di tale tangente con l'asse x e H la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Per quale valore di x è minima la lunghezza del segmento HQ ?
3. Si calcoli l'area della superficie piana delimitata da γ e dagli assi cartesiani.

---

113. PROBLEMA 1 - Americhe 2008 - sessione ordinaria

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro $AB = 2$ e si affrontino le seguenti questioni:
1. Si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ, si abbia $AP + PQ = k$ ove k è un parametro reale diverso da zero.
2. Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.
3. Si calcoli il volume del solido che ha per base il semicerchio delimitato da Γ e tale che tagliato con piani ortogonali ad AB dia tutte sezioni quadrate.

---

114. PROBLEMA 2 - Americhe 2008 - sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:
1. Si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2.
2. Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \le x \le 2$ e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \dfrac{1}{t}\ ;\ 1 - \dfrac{1}{t}\right)$. Al variare di t ($t \neq 0$), P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l'equazione cartesiana e il grafico.

---

115. PROBLEMA 1 - Australe 2008 - sessione ordinaria

L'ellisse Σ ha equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e $P(a\ ;\ b)$, con $b \ge 0$, è un suo punto.
1. Si determini l'equazione della tangente a Σ in P e se ne indichi con Q l'intersezione con l'asse y.
2. Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico Ω descritto dal punto medio M del segmento PQ al variare di P.
3. Si studi e si rappresenti Ω avendo trovato che la sua equazione è: $y = \dfrac{2-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$.

---

116. PROBLEMA 2 - Australe 2008 - sessione ordinaria

Il trapezio $ABCD$ è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore $CD = 2x$.

1. Si provi che è: $AB = \frac{2}{x}$.
2. Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume il valore minimo per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. In corrispondenza di tale valore di *x*, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.

---

117. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2009 - sessione ordinaria

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove *n* è un intero positivo e $x \in R$.

1. Si verifichi che la derivata di f(x) è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
2. Si dica se la funzione *f* ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando *n* è dispari, $f(x) \geq 1$ per ogni *x* reale.
3. Si studi la funzione *g* ottenuta da *f* quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

---

118. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2009 - sessione ordinaria

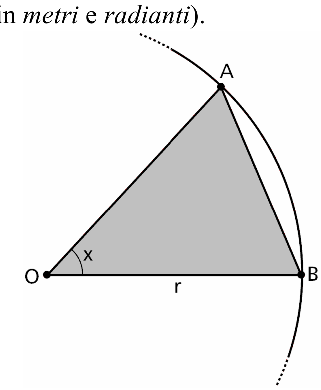
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxy*, si consideri la funzione $f: R \to R$ definita $f(x) = x^3 + kx$, con *k* parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di *f* al variare di *k* (*k* positivo, negativo, o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e $\boldsymbol{\gamma}$ il suo grafico. Si dimostri che $\boldsymbol{\gamma}$ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto *P* in comune. Si determini l'ascissa di *P* approssimandola a meno di *0,1* con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia *D* la regione finita del primo quadrante delimitata da $\boldsymbol{\gamma}$ e dal grafico della funzione inversa di *g*. Si calcoli l'area di *D*.
4. La regione *D* è la base di un solido *W* le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza *12*. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di *W*.

---

119. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2009 - sessione ordinaria

È assegnato il settore circolare $A\hat{O}B$ di raggio *r* e ampiezza *x* (*r* e *x* sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).



1. Si provi che l'area *S* compresa fra l'arco e la corda *AB* è espressa, in funzione di *x*, da $S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - sen\,x)$ con $x \in [0\,;\,2\pi]$.
2. Si studi come varia *S(x)* e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $A\hat{O}B$ pari a $100\ m^2$. Si trovi il valore di *r* per il quale è minimo il perimetro di $A\hat{O}B$ e si esprima il corrispondente valore di *x* in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia r = 2 e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $A\hat{O}B$ è la base di un solido *W* le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a *OB* sono tutte quadrati.
   Si calcoli il volume di W.

---

120. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2009 - sessione ordinaria

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = ln\ x$ (logaritmo naturale).

1. Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse *y* della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse *y* della parallela per *P* all'asse *x*. Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = log_a x$ con *a* reale positivo diverso da *1*?
2. Sia $\boldsymbol{\delta}$ l'inclinazione sull'asse *x* della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa *1*. Per quale valore della base è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia *D* la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di *D*.
4. Si calcoli il volume del solido generato da *D* nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

---

121. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2009 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x^2+1} & se\ x<0\\ 0 & se\ x=0\\ arc\tan(\sin x) & se\ x>0\end{cases}.$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto x = 0.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico **γ**, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva **γ**, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -1$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle *x* e dall'arco di **γ** i cui estremi hanno ascisse *0* e *π*.

---

122. PROBLEMA 1 – P. N. I. 2009 - sessione suppletiva

Si consideri la funzione:

$$f(x)=2+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

1. Si determinino le costanti *a* e *b* in modo che risulti:
$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=\frac{10}{3}-6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$
2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico **γ**.
3. Si conduca la tangente a **γ** nel punto di ascissa $x = 0$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta $y = k$ incontri **γ** in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di *k*, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità
$$S=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}$$
è indipendente dal valore di *k* e se ne calcoli il valore.

---

123. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2009 - sessione suppletiva

I due segmenti adiacenti *OA*, *AB* sono uguali ed hanno una lunghezza data *a*. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta *OB* si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi *OA* ed *OB*, e per il punto *O* si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $OC = a$. Con origine *O*, si conduca una semiretta, che forma con *OB* un angolo **α** e interseca in *P* e *Q* le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:
(1) $$\frac{CP^2+PQ^2+QC^2}{2a^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x = tan(\alpha)$, controllando che risulta:
$$f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}.$$
2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico **γ**.
3. Si dica per quale valore di **α** si hanno rispettivamente il massimo e il minimo del rapporto (1).
4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva **γ** e dal suo asintoto.

---

124. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2009 - sessione suppletiva

Sia data la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}x(2-\ln x) & per\ x>0\\ 0 & per\ x=0\end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa *0* ? E' derivabile in tale punto ?
2. Si studi la funzione *f(x)* e se ne tracci il grafico **γ**, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di *t* ($t > 0$), dell'integrale
$$I(t)=\int_t^{e^2} x(2-\ln x)dx$$
4. Si faccia vedere che *I(t)* tende verso un limite finito quando *t* tende a *0*. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

---

125. PROBLEMA 1 - Europa 2009 - sessione ordinaria

Nel piano cartesiano *Oxy* è data la circonferenza *C* di equazione $x^2 + y^2 = 25$.

a) Si scrivano le equazioni delle tangenti a *C* nei suoi punti di ordinata $y = 3$.
b) Si tracci una corda *MN* perpendicolare al diametro *AB* con $A(0\ ; -5)$ e $B(0\ ; 5)$. Si trovino le coordinate dei punti *M* ed *N* di *C*

in modo che l'area del triangolo *AMN* sia massima.

c) Con l'aiuto di una calcolatrice, si calcoli la lunghezza dell'arco tra i punti $P(5\ ;\ 0)$ e $Q(4\ ;\ 3)$ di *C*.

d) Il settore circolare *POQ* è la base di un solido *W* che tagliato con piani perpendicolari all'asse *x* dà tutte sezioni quadrate. Si calcoli il volume di *W*.

---

126. PROBLEMA 2 - Europa 2009 - sessione ordinaria

Nel piano riferito a un sistema *Oxy* di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole di equazioni: $y^2 = 2ax$ e $x^2 = ay$, con $a > 0$:

a) Si disegnino le due parabole e si denoti con *A* il loro punto di intersezione diverso dall'origine *O*.

b) Sia *B* la proiezione ortogonale di *A* sull'asse *x*. Si dica se il segmento *OB* risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo *a*. Posto $a = 2$ e non disponendo di una calcolatrice come si può procedere per avere l'approssimazione di $\sqrt[3]{2}$ a meno di 10^{-1}?

c) Sia *D* la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi *O* e *A*. Si determini l'area di *D*.

d) Si calcoli il volume del solido generato da *D* in una rotazione completa attorno all'asse *y*.

---

127. PROBLEMA 1 - Americhe 2009 - sessione ordinaria

1. Si trovi l'espressione generale di un polinomio *P(x)* di *4°* grado tale che $P(-2) = P(2) = 0$ e $P(x) \geq 0$ per ogni *x* .
2. Sia $P(x) = (x^2 - 4)^2$. In un sistema di riferimento cartesiano *Oxy* si rappresenti l'andamento di *P(x)*, determinandone in particolare i valori massimi e minimi e flessi.
3. Si determini l'area della regione piana finita *R* compresa tra il grafico di *P(x)* e l'asse *x*.
4. Si inscriva in *R* un rettangolo, con uno dei lati sull'asse *x*. Come va scelto tale rettangolo affinché esso abbia area massima? Come va scelto tale rettangolo affinché, ruotandolo di un mezzo giro attorno all'asse *y*, si ottenga un cilindro di volume massimo?

---

128. PROBLEMA 1 - Australe 2009 - sessione ordinaria

È assegnata la parabola λ d'equazione $x^2 - 2y = 0$.

1. Si disegni λ. Si determinino il *fuoco* e la *direttrice* illustrandone le rispettive proprietà.
2. Siano: $A(-2\ ;\ 2)$ e $B(2\ ;\ 2)$. Si calcoli l'area del segmento parabolico *S* di base *AB*.
3. Si determini la retta $y = k$ che dimezza l'area di *S*.
4. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di *S* attorno alla retta *AB*.

---

129. PROBLEMA 2 - Australe 2009 - sessione ordinaria

Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

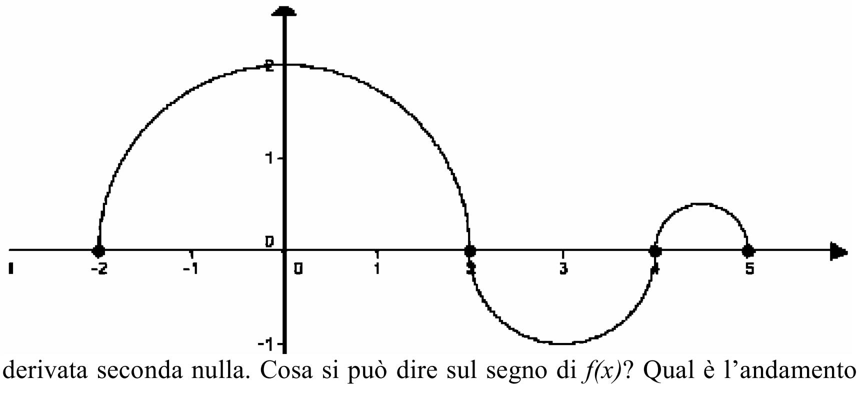
1. Si determinino a, b, c e d di modo che il grafico $\mathbf{\Gamma}$ di p(x) abbia nei punti $F(1\ ;\ -2)$ e $M(2\ ;\ -4)$ rispettivamente il punto di flesso e il punto di minimo.
2. Verificato che $p(x) = x^3 - 3x^2$. Si disegni $\mathbf{\Gamma}$.
3. Si determini il polinomio *q(x)* il cui grafico è simmetrico di $\mathbf{\Gamma}$ rispetto all'asse *x*.
4. Si determinino le aree di ciascuna delle due regioni che Γ delimita con la retta per F parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

---

130. PROBLEMA 1 - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria

Nella figura che segue é riportato il grafico di *g(x)* per $-2 \leq x \leq 5$ essendo *g* la derivata di una funzione *f*.

Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0\ ;\ 0)$, $(3\ ;\ 0)$, $(9/2\ ;\ 0)$ e raggi rispettivi 2, 1, $1/2$.



a) Si scriva un'espressione analitica di *g(x)*. Vi sono punti in cui *g(x)* non è derivabile? Se si, quali sono? E perche?

b) Per quali valori di *x*, $-2 < x < 5$, la funzione *f* presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.

c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} g(t)dt$, si determini *f(4)* e *f(1)*.

d) Si determinino i punti in cui la funzione *f* ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di *f(x)*? Qual è l'andamento qualitativo di *f(x)*?

---

131. PROBLEMA 2 - P. N. I. 2010 - sessione ordinaria

Nel piano riferito ad un sistema *Oxy* di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.

b) L'ascissa di A e $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

c) Sia **D** la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su **D** il segmento di lunghezza massima.

d) Si consideri il solido **W** ottenuto dalla rotazione di **D** intorno all'asse x. Se si taglia **W** con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di **W**.

---

132. PROBLEMA 1 - Ordinamento 2010 - sessione ordinaria

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e $\boldsymbol{\gamma}$ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza $\boldsymbol{\lambda}$ passante per C e tangente esternamente a $\boldsymbol{\gamma}$.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di $\boldsymbol{\lambda}$ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ e invertibile? Se si, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; qual e l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0\ ;\ 1)$? E nel punto $S(1\ ;\ 0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

---

133. PROBLEMA 2 - Ordinamento 2010 - sessione ordinaria

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Qual è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.
